

---

---

# CAPÍTULO 7

---

## SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN

### 7.1. INTRODUCCION

Estudiaremos el sistema de  $n$  ecuaciones lineales de primer orden:

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\&\vdots \\x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{7.1}$$

el cual se denomina no homogénea si  $f_i \neq 0$  para algún  $i = 1, 2, \dots, n$ . El sistema homogéneo asociado al anterior sistema es:

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n \\&\vdots \\x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n\end{aligned}\tag{7.2}$$

$$\text{Sea } \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

entonces el sistema (7.1) se puede escribir:

$$\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad (7.3)$$

y la homogénea asociada (7.2) se puede escribir como

$$\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) \quad (7.4)$$

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) + \vec{f}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (7.5)$$

donde

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

Decimos que la función vectorial

$$\vec{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{bmatrix}$$

es solución de (7.5), si  $\vec{\phi}(t)$  es derivable, satisface la ecuación diferencial y la condición inicial dada, es decir, si

$$\vec{\phi}(t_0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix} = \vec{x}_0$$

**Teorema 7.1.**

Sean  $A(t)$  y  $\vec{f}(t)$  funciones matricial y vectorial respectivamente y continuas en  $[a, b]$ , entonces existe una única función vectorial  $\vec{\phi}(t)$  que es solución del problema de valor inicial (7.5) en  $[a, b]$ .

(Ver la demostración de este teorema en el Apéndice)

**Ejemplo 1.** Consideremos el sistema lineal

$$\begin{aligned}x_1' &= -4x_1 - x_2 \\x_2' &= x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

con  $x_1(0) = 1$  y  $x_2(0) = 2$ .

Solución: el sistema puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \vec{x}_0 &= \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Sus soluciones son de la forma:

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \vec{\phi}_2(t) = \begin{bmatrix} (1-t)e^{-3t} \\ te^{-3t} \end{bmatrix}$$

También

$$\vec{\phi}(t) = \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-3t} \\ (2+3t)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

es un vector solución que satisface la condición inicial.

**Nota:** toda E.D. de orden  $n$  se puede reducir a un sistema de E.D. de primer orden. En efecto, sea

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (7.6)$$

una E.D. de orden  $n$  (lineal o no lineal), donde  $t$  es la variable independiente, haciendo

$$x = x_1, \quad x' = x_2, \quad x'' = x_3, \dots, \quad x^{(n-1)} = x_n$$

obtenemos el siguiente sistema de primer orden:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= x_3 \\&\vdots \\x_n' &= f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})\end{aligned} \quad (7.7)$$

la E.D. 7.6 es equivalente al sistema 7.7, esto quiere decir que si  $x(t)$  es solución de 7.6 entonces  $x_1 = x$ ,  $x_2 = x'$ ,  $x_3 = x''$ ,  $\dots$ ,  $x_n = x^{(n-1)}$  son solución del sistema 7.7 y recíprocamente, si  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  son solución del sistema 7.7 entonces  $x(t) = x_1(t)$  es solución de la E.D. de orden  $n$  7.6.

**Ejemplo 2.** Convertir en un sistema la siguiente E.D.:

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = \text{sen } t$$

**Solución:** hagamos  $x_1 = x$ ,  $x_2 = x'$ ,  $x_3 = x''$  y obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x''' = 6x'' - 11x' + 6x + \text{sen } t = 6x_3 - 11x_2 + 6x_1 + \text{sen } t \\ &= 6x_1 - 11x_2 + 6x_3 + \text{sen } t \end{aligned}$$

matricialmente la E.D. queda así

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sen } t \end{bmatrix}$$

## 7.2. CONJUNTOS FUNDAMENTALES Y SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Consideremos el sistema homogéneo  $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$  donde  $\vec{x}$  es un vector de  $n$  componentes y  $A(t)$  una matriz de  $n \times n$ .

Si  $\vec{\phi}_1(t), \dots, \vec{\phi}_n(t)$ , son  $n$  soluciones linealmente independientes del sistema, entonces decimos que este conjunto es un conjunto fundamental de soluciones; la matriz

$$\Phi(t) = [\vec{\phi}_1(t), \dots, \vec{\phi}_n(t)] = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \cdots & \phi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

o sea, la matriz cuyas columnas son  $\vec{\phi}_1(t), \dots, \vec{\phi}_n(t)$  los cuales son linealmente independientes, la llamamos una matriz fundamental y decimos que

$\Phi(t)$  es una solución matricial ya que cada una de sus columnas es solución de  $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ .

**Definición 7.1 (Matriz Principal).** Decimos que la matriz fundamental  $\varphi(t)$  es matriz principal si

$$\varphi(t_0) = I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

**Nota:** esta matriz es única.

**Definición 7.2 (Wronskiano).** Sea  $\Phi(t)$  una matriz solución (es decir, cada columna es un vector solución) de  $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ , entonces  $W(t) = \det \Phi(t)$  lo llamamos el Wronskiano de  $\Phi(t)$ .

**Observación:** si  $\Phi(t)$  es una matriz fundamental, entonces

$$W(t) = \det \Phi(t) \neq 0$$

## 7.3. MÉTODO DE LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS

Consideremos el sistema

$$\vec{x}' = A\vec{x} \tag{7.8}$$

donde  $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$  y  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  es una matriz constante

El objetivo es hallar  $n$  soluciones linealmente independientes:  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ . Para ello imaginemos la solución del tipo  $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$ , donde  $\vec{v}$  es un vector constante, como

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} \vec{v} = \lambda e^{\lambda t} \vec{v}$$


---

y  $A(e^{\lambda t} \vec{v}) = e^{\lambda t} A\vec{v}$ , de (7.8) tenemos que:

$$\lambda e^{\lambda t} \vec{v} = A(e^{\lambda t} \vec{v}) = e^{\lambda t} A\vec{v},$$

luego

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \quad (7.9)$$

Es decir,  $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$  es solución de (7.8) si y solo si  $\lambda$  y  $\vec{v}$  satisfacen (7.9).

**Definición 7.3 (Vector y valor propio).** Un vector  $\vec{v} \neq \vec{0}$  que satisface  $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$  se le llama vector propio de  $A$  con valor propio  $\lambda$ .

**NOTA:**

- $\vec{v} = \vec{0}$  siempre satisface  $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$  para cualquier matriz  $A$ , por esto no nos interesa.
- $\lambda$  es un valor propio de la matriz  $A$  si y solo si

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda \vec{v} = (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \quad (7.10)$$

es decir,  $\vec{v}$  satisface sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \quad (7.11)$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

La ecuación (7.11) tiene una solución  $\vec{v} \neq \vec{0}$  si y solo si  $\det(A - \lambda I) = 0$ , luego los valores propios de  $A$  son las raíces de la ecuación.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

= Polinomio en  $\lambda$  de grado  $n = p(\lambda)$ .

**Definición 7.4 (Polinomio Característico).** . Al polinomio  $p(\lambda)$  de la nota anterior lo llamamos el Polinomio Característico de la matriz  $A$ .

Como los vectores propios de  $A$  son los vectores  $\vec{v} \neq \vec{0}$  que satisfacen la ecuación vectorial

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

y como  $p(\lambda) = 0$ , tiene a lo sumo  $n$  raíces, entonces existen a lo sumo  $n$  valores propios de  $A$  y por tanto existen a lo sumo  $n$  vectores propios linealmente independientes.

El siguiente teorema se demuestra en los cursos de Algebra Lineal.

**Teorema 7.2.**

Cualesquiera  $k$  vectores propios  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  correspondientes a  $k$  valores propios diferentes  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  respectivamente, son linealmente independientes.

**Pasos para hallar los valores y vectores propios de  $A$ :**

- Hallar  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ .
- Hallar las raíces  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $p(\lambda) = 0$ .
- Para cada valor propio  $\lambda_i$ , resolver el sistema homogéneo

$$(A - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}.$$

**Ejemplo 2.** Hallar tres soluciones linealmente independientes, una matriz fundamental y la solución general del siguiente sistema:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

**Solución:** el polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6) = \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

luego los valores propios son:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = 3$

Halleemos los vectores propios:

Para  $\lambda_1 = 1$ , tenemos que

$$(A-1.I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 1-1 & -1 & 4 \\ 3 & 2-1 & -1 \\ 2 & 1 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_{31}(1) \\ R_{21}(1) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_{21}(1) \\ R_{31}(1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3(\frac{1}{2}) \\ R_2(\frac{1}{3}) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2(\frac{1}{3}) \\ R_3(\frac{1}{2}) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego  $v_2 = 4v_3$ ,  $v_1 = -v_3$ ,  $v_3 = v_3$ , por lo tanto

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t \\ 4e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

Para  $\lambda_2 = -2$ , tenemos que

$$(A+2.I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 1+2 & -1 & 4 \\ 3 & 2+2 & -1 \\ 2 & 1 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_{31}(1) \\ R_{21}(4) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_{21}(4) \\ R_{31}(1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 15 & 0 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_3(\frac{1}{5}) \\ R_2(\frac{1}{15}) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2(\frac{1}{15}) \\ R_3(\frac{1}{5}) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_{32}(-1) \\ R_{12}(-4) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_{12}(-4) \\ R_{32}(-1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego  $v_2 = -v_1$ ,  $v_3 = -v_1$ ,  $v_1 = v_1$ , por lo tanto

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2 = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Para  $\lambda_2 = 3$ , tenemos que

$$(A-3.I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 1-3 & -1 & 4 \\ 3 & 2-3 & -1 \\ 2 & 1 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_{31}(1) \\ R_{21}(-1) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_{21}(-1) \\ R_{31}(1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2(\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}(4)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego  $v_2 = 2v_1$ ,  $v_3 = v_1$ ,  $v_1 = v_1$ , por lo tanto

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_3 = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

Las tres soluciones son  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_2$ ,  $\vec{x}_3$ , como los tres valores propios son diferentes entonces  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_2$ ,  $\vec{x}_3$  son linealmente independientes, o sea que la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3] = \begin{bmatrix} -e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ 4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

La solución general es

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + C_3\vec{x}_3(t) = \Phi(t) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

### RAÍCES COMPLEJAS.

Si  $\lambda = \alpha + i\beta$  es un valor propio o característico de  $A$  con vector propio asociado  $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$ , entonces  $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$  es una solución vectorial compleja de  $\vec{x}' = A \vec{x}$ .

La solución vectorial compleja da lugar a dos soluciones vectoriales reales, en efecto:

#### Lema 7.1.

Sea  $\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + i\vec{x}_2(t)$  una solución vectorial compleja de  $\vec{x}' = A\vec{x}$ , entonces  $\vec{x}_1(t)$  y  $\vec{x}_2(t)$  son soluciones vectoriales reales de  $\vec{x}' = A\vec{x}$ .

**Demostración:** como  $\vec{x}(t)$  es solución de  $\vec{x}' = A \vec{x}$  entonces

$$\vec{x}_1'(t) + i\vec{x}_2'(t) = A(\vec{x}_1(t) + i\vec{x}_2(t)) = A\vec{x}_1(t) + iA\vec{x}_2(t)$$

e igualando parte Real y parte Imaginaria:

$$\vec{x}_1' = A \vec{x}_1 \quad \text{y} \quad \vec{x}_2' = A \vec{x}_2,$$

o sea que  $\vec{x}_1(t)$  y  $\vec{x}_2(t)$  son soluciones. ■

$$\text{Obsérvese que } \vec{x}_1(t) = \mathbf{Re}\{\vec{x}(t)\} \quad \vec{x}_2(t) = \mathbf{Im}\{\vec{x}(t)\}$$

**NOTA:** si  $\lambda = \alpha + i\beta$  es un valor propio complejo y  $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$  es un vector propio complejo asociado a  $\lambda$  entonces

$$\begin{aligned} \vec{x} &= e^{\lambda t} \vec{v} = e^{(\alpha+i\beta)t} (\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) (\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) \\ &= e^{\alpha t} [\vec{v}_1 \cos \beta t - \vec{v}_2 \operatorname{sen} \beta t + i(\vec{v}_1 \operatorname{sen} \beta t + \vec{v}_2 \cos \beta t)] \end{aligned}$$

Por tanto si  $\lambda = \alpha + i\beta$  es un valor propio de  $A$  con vector propio  $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$ , entonces

$$\vec{x}_1 = e^{\alpha t} (\vec{v}_1 \cos \beta t - \vec{v}_2 \operatorname{sen} \beta t), \quad \vec{x}_2 = e^{\alpha t} (\vec{v}_1 \operatorname{sen} \beta t + \vec{v}_2 \cos \beta t) \quad (7.12)$$

son dos soluciones vectoriales reales de  $\vec{x}'(t) = A\vec{x}$  y son linealmente independientes.

**Ejemplo 3.** Hallar dos soluciones vectoriales reales linealmente independientes del siguiente sistema:  $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 12 & -17 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \vec{x}$

**Solución:** hallemos el polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 12 - \lambda & -17 \\ 4 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$$

los valores propios son  $\lambda_1 = 4 + 2i$ ,  $\lambda_2 = 4 - 2i$ , por tanto  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 2$ .

Si  $\lambda_1 = 4 + 2i$  entonces

$$\begin{bmatrix} 8 - 2i & -17 \\ 4 & -8 - 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(8 - 2i)v_1 - 17v_2 = 0 \quad \text{y} \quad 4v_1 + (-8 - 2i)v_2 = 0$$

como estas dos ecuaciones son linealmente dependientes, se toma una cualquiera de las dos, por ejemplo la primera

$$v_2 = \frac{1}{17}(8 - 2i)v_1, \quad v_1 = v_1 \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{17}(8 - 2i) \end{bmatrix} v_1$$

tomando  $v_1 = 17$  tenemos  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 - 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

escogemos como  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

Por lo tanto las dos soluciones vectoriales reales son:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= e^{\alpha t} (\vec{v}_1 \cos \beta t - \vec{v}_2 \sin \beta t) = e^{4t} \left( \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \sin 2t \right) \\ &= e^{4t} \begin{bmatrix} 17 \cos 2t \\ 8 \cos 2t + 2 \sin 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \vec{x}_2(t) &= e^{\alpha t} (\vec{v}_1 \sin \beta t + \vec{v}_2 \cos \beta t) = e^{4t} \left( \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} \sin 2t + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cos 2t \right) \\ &= e^{4t} \begin{bmatrix} 17 \sin 2t \\ 8 \sin 2t - 2 \cos 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Nota:** si se utiliza el otro valor propio  $\lambda_2 = 4 - 2i$  y se sigue el mismo procedimiento se llega a que

$$\vec{x}_1(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 17 \cos 2t \\ 8 \cos 2t - 2 \sin 2t \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 17 \sin 2t \\ 8 \sin 2t + 2 \cos 2t \end{bmatrix}$$

que también son dos soluciones linealmente independientes de la E.D., es decir, que de acuerdo a la selección que hagamos ya sea en los valores propios o en las ecuaciones lineales cuando escalonemos la matriz de coeficientes, tendremos respuestas diferentes, esto se debe a que escogemos vectores base  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  diferentes.

### RAÍCES IGUALES.

La matriz  $e^{At}$  que definimos a continuación, cuya existencia esta demostrada en el Apéndice A.3 .

**Definición 7.5 (Matriz exponencial).** Si  $A$  es una matriz  $n \times n$  y constante

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n + \dots$$

Esta serie es convergente para todo  $t$  y para toda matriz  $A_{n \times n}$  constante. Derivando formalmente (Ver la demostración de la derivada en el Apéndice A.4), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= A + A^2 t + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n + \dots \\ &= A \left( I + At + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n + \dots \right) = A e^{At} \end{aligned}$$

Por tanto,  $e^{At} \vec{v}$  es una solución de  $\vec{x}' = A\vec{x}$ , donde  $\vec{v}$  es un vector constante. En efecto

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(e^{At} \vec{v})}_{\vec{x}} = A e^{At} \vec{v} = A \underbrace{(e^{At} \vec{v})}_{\vec{x}}$$

También en el Apéndice se demuestran las siguientes propiedades.

**Propiedades:**

- i).  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
- ii).  $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$
- iii). Si  $AB = BA$ , donde  $A_{n \times n}$  y  $B_{n \times n}$ , entonces  $e^{A+Bt} = e^{At} e^{Bt}$

**Observación:**

$$e^{At} \vec{v} = e^{At - \lambda I t + \lambda I t} \vec{v} = e^{(A - \lambda I)t} e^{\lambda I t} \vec{v} \quad (7.13)$$

$$\text{Ya que } (A - \lambda I)\lambda I = (\lambda I)(A - \lambda I)$$

$$\begin{aligned} \text{Pero } e^{\lambda I t} \vec{v} &= \left[ I + \lambda I t + (\lambda I)^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \vec{v} \\ &= \left[ 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots \right] I \vec{v} = e^{\lambda t} \vec{v} \end{aligned}$$

sustituyendo en (7.13)

$$e^{At} \vec{v} = e^{\lambda t} e^{(A - \lambda I)t} \vec{v} \quad (7.14)$$

Si  $\vec{v}$  satisface  $(A - \lambda I)^m \vec{v} = \vec{0}$  para algún entero  $m$ , entonces la serie infinita de  $e^{(A-\lambda I)t}$  termina después de  $m$  términos; en efecto,

$$(A - \lambda I)^{m+e} \vec{v} = (A - \lambda I)^e (A - \lambda I)^m \vec{v} = \vec{0}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} e^{(A-\lambda I)t} \vec{v} &= \left[ I + (A - \lambda I)t + (A - \lambda I) \frac{t^2}{2!} + \dots + (A - \lambda I)^{m-1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right] \vec{v} \\ &= \vec{v} + t(A - \lambda I)\vec{v} + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda I)^2 \vec{v} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda I)^{m-1} \vec{v} \end{aligned}$$

en (7.14):

$$\begin{aligned} e^{At} \vec{v} &= e^{\lambda t} [\vec{v} + t(A - \lambda I)\vec{v} \\ &\quad + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda I)^2 \vec{v} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda I)^{m-1} \vec{v}] \quad (7.15) \end{aligned}$$

#### Algoritmo para hallar las $n$ soluciones linealmente independientes

1. Hallar los valores y vectores propios de la matriz  $A$ . Si  $A$  tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes entonces  $\vec{x}' = A\vec{x}$  tiene  $n$  soluciones linealmente independientes de la forma  $e^{\lambda t} \vec{v}$ .
2. Si  $A$  tiene  $k < n$  vectores propios linealmente independientes, entonces se tienen  $k$  soluciones linealmente independientes de la forma  $e^{\lambda t} \vec{v}$ . Para encontrar las soluciones adicionales se toma un valor propio  $\lambda$  de  $A$  y se hallan todos los vectores  $\vec{v}$  tales que

$$(A - \lambda I)^2 \vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A - \lambda I)\vec{v} \neq \vec{0}.$$

Para cada uno de estos vectores  $\vec{v}$

$$e^{At} \vec{v} = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t} \vec{v} = e^{\lambda t} [\vec{v} + t(A - \lambda I)\vec{v}]$$

es una solución adicional de  $\vec{x}' = A\vec{x}$ . Esto se hace para todos los valores propios de  $A$ .

3. Si aún en el paso anterior no se han conseguido las  $n$  soluciones linealmente independientes, entonces se buscan los vectores  $\vec{v}$  tales que

$$(A - \lambda I)^3 \vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A - \lambda I)^2 \vec{v} \neq \vec{0}$$

por lo tanto

$$e^{At} \vec{v} = e^{\lambda t} \left[ \vec{v} + t(A - \lambda I) \vec{v} + \frac{t^2}{2} (A - \lambda I)^2 \vec{v} \right]$$

es una nueva solución linealmente independiente de  $\vec{x}' = A \vec{x}$ .

4. Se continúa de la misma manera hasta completar  $n$  soluciones linealmente independientes.

**Ejemplo 4.** Resolver por el método anterior el problema de valor inicial

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Solución:** el polinomio característico de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad p(\lambda) = (2 - \lambda)^3$$

luego  $\lambda = 2$  es un valor propio de  $A$  con multiplicidad 3.

Hallemos los vectores propios asociados a  $\lambda = 2$ , estos vectores deben satisfacer la ecuación

$$(A - 2I) \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}(2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego  $v_2 = 0$ ,  $v_3 = 0$  y  $v_1 = v_1$ , por lo tanto el vector propio asociado a  $\lambda = 2$  es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

la solución asociada a este vector propio es

$$\vec{x}_1(t) = e^{2t}\vec{v} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

luego la dimensión del espacio propio asociado al valor propio  $\lambda = 2$  es uno, esto quiere decir que debemos hallar un vector  $\vec{v}$  tal que

$$(A - 2I)^2\vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A - 2I)\vec{v} \neq \vec{0}$$

$$(A - 2I)^2\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir  $v_3 = 0$ ,  $v_1$  y  $v_2$  son parámetros; elegimos  $v_1 = 0$  y  $v_2 = 1$  de tal manera que el vector  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  sea linealmente independiente con el vector

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  hallado anteriormente

La solución asociada a  $\vec{v}$  es

$$\begin{aligned} \vec{x}_2(t) &= e^{\lambda t}[\vec{v} + t(A - \lambda I)\vec{v}] = e^{2t}[\vec{v} + t(A - 2I)\vec{v}] \\ &= e^{2t} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = e^{2t} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como  $(A - 2I)^2\vec{v} = \vec{0}$  tiene dos soluciones linealmente independientes

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se debe buscar otra solución linealmente independiente con las anteriores, que cumpla la condición

$$(A - 2I)^3 \vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A - 2I)^2 \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$(A - 2I)^3 \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego  $v_1, v_2$  y  $v_3$  son parámetros, entonces escogemos  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  de tal manera

que sea linealmente independiente con  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y que además cumpla

$$(A - 2I)^2 \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Como el sistema es  $3 \times 3$ , entonces la última solución es

$$\begin{aligned} \vec{x}_3(t) &= e^{\lambda t} [\vec{v} + t(A - \lambda I)\vec{v} + \frac{t^2}{2}(A - \lambda I)^2 \vec{v}] = e^{2t} [\vec{v} + t(A - 2I)\vec{v} + \frac{t^2}{2}(A - 2I)^2 \vec{v}] \\ &= e^{2t} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= e^{2t} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = e^{2t} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 2t - \frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La solución general es

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{x}_1(t) + C_2 \vec{x}_2(t) + C_3 \vec{x}_3(t) = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 2t - \frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1 \end{bmatrix}$$

en  $t = 0$  se tiene que

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 3$  y  $C_3 = 1$

La solución particular buscada es

$$\vec{x}(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 + 5t - \frac{t^2}{2} \\ 3 - t \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Nota:** en algunos casos el valor propio repetido  $\lambda$  de multiplicidad  $m$  puede producir  $m$  vectores propios, en otros casos (como en el ejemplo anterior) puede producir menos de  $m$  vectores propios, teniéndose que completar el resto (hasta completar  $m$ ) con los que llamaremos vectores propios generalizados.

**Definición 7.6 (Valor propio defectuoso).** *Un valor propio  $\lambda$  de multiplicidad  $m > 1$  se le llama defectuoso si produce menos de  $m$  vectores propios linealmente independientes. Si  $\lambda$  tiene  $p < m$  vectores propios linealmente independientes, al número  $d = m - p$  de vectores propios faltantes se le llama el defecto del valor propio defectuoso  $\lambda$*

En el ejemplo anterior  $\lambda = 2$  tiene multiplicidad  $m = 3$  y solo produjo  $p = 1$  vector propio, al número  $d = m - p = 3 - 1 = 2$  de vectores propios faltantes se le llama el defecto del valor propio  $\lambda = 2$ , los dos vectores propios faltantes se consiguen con vectores propios generalizados.

#### Observaciones.

1. Si  $\lambda$  es un valor propio de la matriz  $A$ , denominamos vector propio generalizado de rango  $m$  asociado a  $\lambda$ , al vector  $\vec{v}$  tal que

$$(A - \lambda I)^m \vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A - \lambda I)^{m-1} \vec{v} \neq \vec{0}$$

Cuando  $m = 1$ , el vector  $\vec{v}$  es un vector propio generalizado de rango uno y es también un vector propio ordinario; cuando  $m = 2$ , el vector  $\vec{v}$  es un vector propio generalizado de rango dos, pero no es un vector propio ordinario.

Una cadena de longitud  $m$  de vectores propios generalizados originados en el vector propio  $\vec{v}_1$  es un conjunto de  $m$  vectores propios generaliza-

dos  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  tales que

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)\vec{v}_m &= \vec{v}_{m-1} \\ (A - \lambda I)\vec{v}_{m-1} &= \vec{v}_{m-2} \\ &\vdots \\ (A - \lambda I)\vec{v}_2 &= \vec{v}_1\end{aligned}\tag{7.16}$$

Si sustituimos  $\vec{v}_{m-1}$  en la segunda expresión de (7.16) y luego  $\vec{v}_{m-2}$  en la tercera expresión y así sucesivamente, tenemos que

$$(A - \lambda I)^{m-1}\vec{v}_m = \vec{v}_1,\tag{7.17}$$

y como  $\vec{v}_1$  es un vector propio ordinario, entonces premultiplicando (7.17) por  $(A - \lambda I)$  se llega a que

$$(A - \lambda I)^m\vec{v}_m = (A - \lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

en general para  $j = 1, \dots, m - 1$ :

$$(A - \lambda I)^j\vec{v}_m = \vec{v}_{m-j}\tag{7.18}$$

Utilizando (7.18) se puede mostrar que la cadena  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  es un conjunto de vectores linealmente independientes, para ello suponemos que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_m\vec{v}_m = \vec{0}$$

se premultiplica por  $(A - \lambda I)^{m-1}$  y se llega a que  $\alpha_m = 0$ , en forma similar se demuestra que  $\alpha_{m-1} = 0$  y así sucesivamente hasta mostrar que  $\alpha_1 = 0$

2. Utilizando (7.15) tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= e^{\lambda t}[\vec{v}_m + t(A - \lambda I)\vec{v}_m + \\ &\quad \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I)^2\vec{v}_m + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A - \lambda I)^{m-1}\vec{v}_m]\end{aligned}\tag{7.19}$$

donde  $\vec{v}_m$  satisface  $(A - \lambda I)^m\vec{v}_m = \vec{0}$  y  $(A - \lambda I)^{m-1}\vec{v}_m = \vec{v}_1 \neq \vec{0}$  y por (7.18)

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_m + t\vec{v}_{m-1} + \frac{t^2}{2!}\vec{v}_{m-2} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\vec{v}_1]\tag{7.20}$$

**Algoritmo para una cadena de longitud m**

- Hallar  $\vec{v}_1$  vector propio de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda$  que satisfice el sistema:  $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ .
- Hallar  $\vec{v}_2$  tal que  $(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$ .
- Hallar  $\vec{v}_m$  tal que  $(A - \lambda I)\vec{v}_m = \vec{v}_{m-1}$ .
- La solución asociada a esta cadena es

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \left[ \vec{v}_m + t\vec{v}_{m-1} + \frac{t^2}{2!} \vec{v}_{m-2} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \vec{v}_1 \right]$$

- Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y \\ y' &= a_2x + b_2y \end{aligned} \quad (7.21)$$

luego su ecuación característica es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{bmatrix} = (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2b_1 \\ &= \lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

y supongamos que tiene una raíz  $\lambda = m$  con multiplicidad dos. Supongamos también que

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

es el vector propio asociado a  $\lambda = m$  y que

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

es el vector propio generalizado de rango dos, asociado al valor propio  $\lambda = m$ , es decir

$$(A - mI)^2 \vec{v}_2 = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A - mI) \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \neq \vec{0}$$

Por tanto las dos soluciones linealmente independientes son

$$\vec{x}_1(t) = e^{mt} \vec{v}_1 = e^{mt} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

y por (7.20) la segunda solución es

$$\vec{x}_2(t) = e^{mt}[\vec{v}_2 + t\vec{v}_1] = e^{mt} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = e^{mt} \begin{bmatrix} A_1 + At \\ B_1 + Bt \end{bmatrix},$$

la solución general es

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) \\ &= C_1e^{mt} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + C_2e^{mt} \begin{bmatrix} A_1 + At \\ B_1 + Bt \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.23)$$

finalmente

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1Ae^{mt} + C_2(A_1 + At)e^{mt} \\ y(t) &= C_1Be^{mt} + C_2(B_1 + Bt)e^{mt} \end{aligned} \quad (7.24)$$

### Teorema 7.3.

La matriz  $X(t)_{n \times n}$  es una matriz fundamental de la E.D. vectorial  $\vec{x}' = A\vec{x}$  si y solo si satisface la E.D. matricial  $X'(t) = AX(t)$  y además  $\det X(t_0) \neq 0$ .

**Demostración:** sea  $X(t) = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)]$  una matriz fundamental de  $\vec{x}' = A\vec{x}$ , entonces

$$\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)$$

son linealmente independientes y por tanto  $\det X(t_0) \neq 0$ .

Derivando la matriz  $X(t)$ , tenemos

$$X'(t) = [\vec{x}'_1(t), \vec{x}'_2(t), \dots, \vec{x}'_n(t)]$$

y como

$$AX(t) = [A\vec{x}_1(t), A\vec{x}_2(t), \dots, A\vec{x}_n(t)]$$

y sabiendo que

$$A\vec{x}_1(t) = \vec{x}'_1(t), \quad A\vec{x}_2(t) = \vec{x}'_2(t), \dots, A\vec{x}_n(t) = \vec{x}'_n(t)$$

entonces

$$X'(t) = [A\vec{x}_1(t), A\vec{x}_2(t), \dots, A\vec{x}_n(t)] = AX(t)$$

luego  $X(t)$  es solución de la E.D. matricial

$$X' = AX$$

Recíprocamente como  $\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0)$  son linealmente independientes, ya que  $\det X(t_0) \neq 0$ ; entonces por la nota ii. hecha en la página 96 del Cap. IV, tenemos que

$$\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t) \quad \text{son linealmente independientes}$$

luego la matriz

$$X(t) = [\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)]$$

es una matriz fundamental. ■

**Teorema 7.4.**

La matriz  $e^{At}$  es una matriz principal de  $\vec{x}' = A\vec{x}$ .

**Demostración:** en efecto,  $e^{At}$  es solución de  $X' = AX$  ya que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

y por el teorema anterior  $e^{At}$  es una matriz fundamental, además,

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \dots,$$

y para  $t = 0$  se tiene que  $e^{A0} = I$ . ■

**Teorema 7.5.**

Sean  $X(t)$  y  $Y(t)$  dos matrices fundamentales de  $\vec{x}' = A\vec{x}$ , entonces existe una matriz constante  $C_{n \times n}$  tal que  $Y(t) = X(t)C$ .

**Demostración:** como

$$X(t) = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)] \quad \text{es fundamental}$$

entonces  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  son linealmente independientes. Similarmente como

$$Y(t) = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n] \quad \text{es fundamental}$$

entonces  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  son linealmente independientes.

Como  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  es una base, entonces cada  $y_i$  se puede expresar como una combinación lineal de esta base, es decir,

$$\vec{y}_i = C_{1i} \vec{x}_1 + \dots + C_{ni} \vec{x}_n = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)] \begin{bmatrix} C_{1i} \\ C_{2i} \\ \vdots \\ C_{ni} \end{bmatrix}$$

para  $i = 1, \dots, n$ , luego

$$Y(t) = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n] = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)] \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = X C_{n \times n}$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema nos permite hallar una matriz exponencial, conociendo una matriz fundamental.

**Teorema 7.6.**

Sea  $X(t)$  una matriz fundamental de  $\vec{x}' = A\vec{x}$  entonces

$$e^{At} = X(t) X^{-1}(0).$$

**Demostración:** sea  $X(t)$  una matriz fundamental y como  $e^{At}$  es matriz fundamental (principal), entonces, existe

$$C_{n \times n} \text{ tal que } e^{At} = X(t)C$$

Para  $t = 0 \Rightarrow e^{0t} = I = X(0)C \Rightarrow C = X^{-1}(0)$ . Luego  $e^{At} = X(t) X^{-1}(0)$ .  $\blacksquare$

**Ejemplo 5.** Hallar  $e^{At}$  para

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Solución:

Hallamos los valores propios, que en este caso son:  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\lambda = 5$

$$\begin{aligned} \text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{Para } \lambda = 3 \Rightarrow \vec{v}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{Para } \lambda = 5 \Rightarrow \vec{v}_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_3(t) = e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y por Teorema 7.2  $\vec{x}_1(t)$ ,  $\vec{x}_2(t)$ ,  $\vec{x}_3(t)$  son linealmente independientes.

Luego  $X(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix}$  es la matriz fundamental.

$$\text{Luego } X(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{At} &= X(t) X^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & -\frac{e^t}{2} + \frac{e^{3t}}{2} & -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{e^{5t}}{2} \\ 0 & e^{3t} & -e^{3t} + e^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Ejercicios.** En los siguientes ejercicios, hallar la solución general para  $\vec{x}' = A\vec{x}$  y con el Wronskiano comprobar que los vectores solución son linealmente independientes.

- $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$

$$\text{(Rta.: } \vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-4t})$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 12 & -15 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(Rta.: } \vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{6t})$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(Rta.: } \vec{x}(t) = C_1 \left[ \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \sin 2t \right] + C_2 \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \sin 2t \right])$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(Rta.: } \vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + C_2 e^t \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \sin 2t \right] \\ + C_3 e^t \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin 2t \right])$$

$$5. \vec{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$\text{(Rta.: } \lambda = -3 \text{ (mult.2), vector propio } \vec{v} = [1 \ -1]^T, x_1(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{-3t}, x_2(t) = (-C_1 - C_2 t)e^{-3t})$$

$$6. \vec{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$\text{(Rta.: } \lambda = -1 \text{ (mult.3) defectuoso, } x_1(t) = (-2C_2 + C_3 - 2C_3 t)e^{-t}, x_2(t) = (C_1 - C_2 + C_2 t - C_3 t + \frac{1}{2}C_3 t^2)e^{-t}, x_3(t) = (C_2 + C_3 t)e^{-t})$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(Rta.: } \vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ -4t \end{bmatrix} e^{2t})$$

## 7.4. VARIACIÓN DE PARÁMETROS

En el capítulo 4. vimos que la solución general de una E.D. lineal no homogénea tenía dos partes que eran  $x_h$  y  $x_p$  y la solución general era  $x(t) = x_h + x_p$ . Lo mismo nos sucede cuando tenemos una E.D. lineal vectorial no homogénea  $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ , su solución general es de la forma  $\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p$ , donde  $\vec{x}_h$  es la solución a la homogénea asociada  $\vec{x}' = A\vec{x}$  y esta expresada por

$$\vec{x}_h = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n$$

El objetivo en esta sección es hallar la solución particular  $\vec{x}_p$  de la ecuación no homogénea, para ello utilizamos el método de variación de parámetros, de la misma manera como lo hicimos en el capítulo 4.

Consideremos la E.D. vectorial no homogénea:

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t). \quad (7.25)$$

Sean  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  las soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada, o sea que

$$\vec{x}_h(t) = C_1\vec{x}_1(t) + \cdots + C_n\vec{x}_n(t) = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n] \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = X(t)\vec{C}$$

y variando los parámetros  $C_1, C_2, \dots, C_n$  tenemos

$$\vec{x}(t) = u_1(t)\vec{x}_1(t) + \cdots + u_n(t)\vec{x}_n(t) = [\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = X\vec{u},$$

la cual suponemos que es una solución de  $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ .

Luego,  $\vec{x}(t) = X(t)\vec{u}(t)$ , donde

$$X(t) = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)] \quad \text{y} \quad \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

Como

$$\vec{x}'(t) = \frac{d}{dt}(X(t)\vec{u}(t)) = X'(t)\vec{u}(t) + X(t)\vec{u}'(t),$$

$$A\vec{x} + \vec{f}(t) = \underbrace{AX(t)}_{X'}\vec{u}(t) + \vec{f}(t) = X'(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t)$$

Sustituimos en (7.25) y cancelando, obtenemos:

$$X(t)\vec{u}'(t) = \vec{f}(t)$$

Premultiplicando por  $X^{-1}(t) : \vec{u}'(t) = X^{-1}(t)\vec{f}(t)$

$$\vec{u}(t) = \int X^{-1}(t)\vec{f}(t) dt + \vec{C}, \quad \text{donde } \vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

luego

$$\vec{x}(t) = X\vec{u} = X(t) \left[ \int X^{-1}(t)\vec{f}(t) dt + \vec{C} \right] = X(t) \int X^{-1}(t)\vec{f}(t) dt + X(t)\vec{C}$$

como  $\vec{x}_h(t) = X(t)\vec{C}$ , entonces

$$\vec{x}_p = X(t) \int X^{-1}(t)\vec{f}(t) dt$$

y la solución general es

$$\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p = X(t)\vec{C} + X(t) \int X^{-1}(t)\vec{f}(t) dt$$

Para resolver el problema de valor inicial:

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \text{ con } \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \text{ como}$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = X(t_0)\vec{C} + X(t_0) \int X^{-1}(t)\vec{f}(t) dt \Big|_{t=t_0}$$

despejando  $\vec{C} = X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 - \int X^{-1}(t)\vec{f}(t) dt \Big|_{t=t_0}$  y sustituyendo en la solución general

$$\vec{x} = X(t) \left( X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 - \int X^{-1}(t)\vec{f}(t) dt \Big|_{t=t_0} \right) + X(t) \int X^{-1}(t)\vec{f}(t) dt =$$

$$\begin{aligned} X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 - X(t) \int_{t=t_0} X^{-1}(t) \vec{f}(t) dt \Big|_{t=t_0} + X(t) \int X^{-1}(t) \vec{f}(t) dt \Big|_t &= \\ &= X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \vec{f}(s) ds \end{aligned}$$

en resumen, la solución al problema de valor inicial es

$$\vec{x}(t) = X(t) X^{-1}(t_0) \vec{x}_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \vec{f}(s) ds \quad (7.27)$$

En particular si

$$X(t) = e^{At} \Rightarrow X^{-1}(t) = e^{-At} \Rightarrow X^{-1}(t_0) = e^{-At_0}$$

entonces

$$\vec{x}(t) = e^{At} e^{-At_0} \vec{x}_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} \vec{f}(s) ds$$

o sea que

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \vec{f}(s) ds \quad (7.28)$$

**Ejemplo 6.** Utilizar (7.27) para resolver el sistema:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución: para resolver este ejercicio, utilizaremos el siguiente resultado del álgebra lineal:  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ .

Los valores propios de la matriz  $A$  son:  $\lambda = 3$ ,  $\lambda = 4$

Los vectores propios linealmente independientes son:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Las soluciones vectoriales linealmente independientes son:

$$\vec{x}_1(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^{4t} \vec{v}_2 = e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix}$$

Luego la matriz fundamental y su inversa en términos de  $s$  son:

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}, \quad X^{-1}(s) = \begin{bmatrix} -2e^{-3s} & 3e^{-3s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{bmatrix}$$

Pasos: a) hallemos:

$$\begin{aligned} X(t) \int_{t_0=0}^t X^{-1}(s) \vec{f}(s) ds &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} -2e^{-3s} & 3e^{-3s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5s} \\ 4 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} -2e^{2s} + 12e^{-3s} \\ e^s - 4e^{-4s} \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{2t} - 4e^{-3t} + 5 \\ e^t + e^{-4t} - 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 + 5e^{3t} - 6e^{4t} \\ e^{5t} - 2 + 5e^{3t} - 4e^{4t} \end{bmatrix} \\ &= 5 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{bmatrix} \\ &= 5\vec{x}_1(t) - 2\vec{x}_2(t) + \vec{x}_p \end{aligned}$$

Luego la solución particular es

$$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{bmatrix}$$

b) Hallemos  $X(t) X^{-1}(0) \vec{x}_0$

$$\begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6e^{3t} + 15e^{4t} \\ -6e^{3t} + 10e^{4t} \end{bmatrix}$$

De a) y b):

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= X(t) X^{-1}(0) \vec{x}_0 + X(t) \int_0^t X^{-1}(s) \vec{f}(s) ds = \\ &= \begin{bmatrix} -6e^{3t} + 15e^{4t} \\ -6e^{3t} + 10e^{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 + 5e^{3t} - 6e^{4t} \\ e^{5t} - 2 + 5e^{3t} - 4e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{3t} + 9e^{4t} + 2e^{5t} - 1 \\ -e^{3t} + 6e^{4t} + e^{5t} - 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Ejercicios.**

1. Hallar la solución particular del siguiente sistema:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 2t \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$(\text{Rta.: } \vec{x}(t) = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 666 - 120t - 575e^{-t} - 91e^{5t} \\ 588 - 60t - 575e^{-t} - 13e^{5t} \end{bmatrix})$$

2. Hallar la solución particular del siguiente sistema:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \cos 2t \end{bmatrix}.$$

$$(\text{Rta.: } \vec{x}(t) = \frac{1}{4} e^{3t} \begin{bmatrix} -2t \sin 2t \\ \sin 2t + 2t \cos 2t \end{bmatrix})$$

3. Hallar la solución general del siguiente sistema:

$$x' = 4y + 1, \quad y' = -x + 2$$

$$(\text{Rta.: } x = -2C_1 \cos 2t + 2C_2 \sin 2t + 2; \quad y = C_2 \cos 2t + C_1 \sin 2t - \frac{1}{4})$$

4. Hallar la solución general del siguiente sistema:

$$x' = -y + t, \quad y' = x - t$$

$$(\text{Rta.: } x = C_1 \cos t - C_2 \sin t + 1 + t; \quad y = C_2 \cos t + C_1 \sin t - 1 + t)$$

5. Sean
- $\vec{\varphi}_1(t)$
- una solución de
- $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}_1(t)$
- ,
- $\vec{\varphi}_2(t)$
- una solución de
- $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}_2(t)$
- ,
- $\dots$
- ,
- $\vec{\varphi}_n(t)$
- una solución de
- $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}_n(t)$
- . Demostrar que

$$\vec{\varphi}_1(t) + \vec{\varphi}_2(t) + \dots + \vec{\varphi}_n(t)$$

es una solución de

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}_1(t) + \vec{b}_2(t) + \dots + \vec{b}_n(t).$$

A este resultado también se le llama principio de superposición.

6. Sea
- $\vec{b}(t) = \sum_{k=1}^m \vec{b}_k e^{i\beta_k t}$
- . (o sea una suma finita de entradas periódicas). Suponga que
- $i\beta_k$
- no es raíz de la ecuación característica de
- $A$
- para
- $k = 1, 2, \dots, m$
- . Usar el principio de superposición del ejercicio anterior para mostrar que la solución
- $\vec{x}(t)$
- de la ecuación
- $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}(t)$
- se puede escribir en la forma

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^m \vec{x}_k e^{i\beta_k t}.$$

7. Si las ecuaciones del movimiento de una partícula de masa  $m$  que se mueve en el plano  $XY$  son

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(t, x, y), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = g(t, x, y)$$

donde  $f$  y  $g$  son las componentes en  $x$  y  $y$  de la fuerza que actúa sobre la partícula. Reemplazar este sistema de dos ecuaciones de segundo orden por un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden. (Sugerencia: haga  $x = x, y = y, x' = v_x, y' = v_y$ , donde  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes en  $x$  y en  $y$  de la velocidad).

## 7.5. TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA SISTEMAS

**Definición 7.7.** Si

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}\{\vec{x}(t)\}(s) \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \int_0^\infty e^{-st} x_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^\infty e^{-st} x_n(t) dt \end{bmatrix}$$

Y si

$$\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{F}(s) = \mathcal{L}\{\vec{f}(t)\}(s) = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^\infty e^{-st} f_n(t) dt \end{bmatrix}$$

Sea el P.V.I.  $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$ ,  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ . Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\vec{x}'(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)\} \\ &= A\mathcal{L}\{\vec{x}(t)\}(s) + \mathcal{L}\{\vec{f}(t)\}(s) \\ &= A\vec{X}(s) + \vec{F}(s) \end{aligned} \tag{7.29}$$

$$\text{Pero } \mathcal{L}\{\vec{x}'(t)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{x_1'\}(s) \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{x_n'\}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix} = s\vec{X}(s) - \vec{x}(0)$$

en (7.29):  $s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) = A\vec{X}(s) + \vec{F}(s)$

Luego  $(sI - A)\vec{X}(s) = \vec{x}(0) + \vec{F}(s) = \vec{x}_0 + \vec{F}(s)$

**Ejemplo 7.** Resolver el problema de valor inicial.

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}\{\vec{x}'\}(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{L}\{\vec{x}\}(s) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathcal{L}\{e^t\}(s) \\ s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}(s) + \frac{1}{s-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \left(sI - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \vec{X}(s) &= \vec{x}(0) + \frac{1}{s-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{s-1} \\ 1 + \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (s-1)X_1(s) - 4X_2(s) &= 2 + \frac{1}{s-1} \\ -X_1(s) + (s-1)X_2(s) &= 1 + \frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

Resolviendo el anterior sistema para  $X_1(s)$ ,  $X_2(s)$ :

$$\begin{aligned}X_1(s) &= -\frac{1}{s-1} + \frac{11}{4} \frac{1}{s-3} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \\ X_2(s) &= -\frac{1}{4} \frac{1}{s-1} + \frac{11}{8} \frac{1}{s-3} - \frac{1}{8} \frac{1}{s+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{11}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= -e^t + \frac{11}{4} e^{3t} + \frac{1}{4} e^{-t} \\ x_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\} \\ &= -\frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{11}{8} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}e^t + \frac{11}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t}$$

Usar la transformada de Laplace para resolver los siguientes sistemas de E.D.

- $$\frac{dx}{dt} = -x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1$$

(Rta.:  $x(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t, \quad y(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t$ )
- $$\frac{dx}{dt} = 2y + e^t$$

$$\frac{dy}{dt} = 8x - t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

(Rta.:  $x = \frac{173}{192}e^{4t} + \frac{t}{8} - \frac{e^t}{15} + \frac{53}{320}e^{-4t}, \quad y = \frac{1}{16} - \frac{53}{160}e^{-4t} - \frac{8}{15}e^t + \frac{173}{96}e^{4t}$ )
- $$\frac{dx}{dt} = x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x - y, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2$$

(Rta.:  $x = -\cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t, \quad y = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\sin 3t$ )
- Dos pesos de 96 libras y 64 libras se mueven horizontalmente en una superficie lisa, cada resorte tiene  $k = k_1 = k_2 = 600$ . En  $t = 0$  los resortes están sin estirar y el de peso 96 tiene una velocidad de 600 pies/seg. alejándose del muro y el otro esta en reposo. Encontrar las E.D. del movimiento y la posición en el tiempo  $t$ . (Ver Capítulo 4 figura 4.16)

(Rta.:  $m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x + k_2(y - x), \quad m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = -k_2(y - x)$   
 $x = 24 \sin 10t + 6\sqrt{6} \sin \sqrt{600}t, \quad y = 36 \sin 10t - 6\sqrt{6} \sin \sqrt{600}t$ )

**Ejercicio 5.** Hallar las E.D. del sistema de resortes acoplados con constantes  $k_1$  y  $k_2$  y masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, como se muestra en la figura 4.14; resolverla con  $k_1 = k_2 = k_3 = 1, \quad m_1 = m_2 = 1$  y  $x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad y'(0) = 1$

(Rta.:  $x = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}, \quad y = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$ )

## 7.6. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 8. Con el paquete Maple, hallar la solución general y la solución que cumple la condición inicial, del sistema:

$$x'_1 = -4x_1 - x_2$$

$$x'_2 = x_1 - 2x_2$$

$$\text{con } x_1(0) = 1, \quad x_2 = 2$$

Solución general:

```
>sys1 :=[diff(x(t),t)=-4*x(t)-y(t), diff(y(t),t)=x(t)-2*y(t)];
```

```
sys1 := [x' = -4 * x - y, y' = x - 2 * y]
```

```
>sol1 := dsolve(sys1);
```

```
sol1 := {x(t) = e^{-3t} (_C1 + _C2 t), y(t) = -e^{-3t} (_C1 + _C2 t + _C2)}
```

La solución que cumple la condición inicial:

```
>dsolve( {diff(x(t),t) = -4*x(t)- y(t), diff(y(t),t) =
```

```
x(t)-2*y(t), x(0)=1, y(0)=2}, {x(t), y(t)});
```

La solución es

```
{y(t) = -exp(-3 t) (-2 - 3 t), x(t) = exp(-3 t) (1 - 3 t)}
```

Universidad de Antioquia, Depto. de Matemáticas