
CAPÍTULO 6

TRANSFORMADA DE LAPLACE

6.1. INTRODUCCION

Definición 6.1. Sea $f(t)$ una función definida para todo $t \geq 0$; se define la **Transformada de Laplace** de $f(t)$ así:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt,\end{aligned}$$

si el límite existe.

Teorema 6.1.

Si $f(t)$ es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y además $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t \geq T$, donde M es constante, $c > 0$ constante y $T > 0$ constante, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe para $s > c$.

Demostración: veamos que la siguiente integral existe, en efecto:

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}\{f(t)\}(s)| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-st}| |f(t)| dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt, \quad \text{sabiendo que } e^{-st} > 0\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\int_0^T e^{-st}|f(t)|dt}_{I_1} + \underbrace{\int_T^\infty e^{-st}|f(t)|dt}_{I_2}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^T e^{-st}|f(t)|dt \text{ existe, ya que } f \text{ es continua a tramos} \\ I_2 &= \int_T^\infty e^{-st} \underbrace{|f(t)|}_{\leq Me^{ct}} dt \leq \int_T^\infty e^{-st} Me^{ct} dt = M \int_T^\infty e^{(-s+c)t} dt \\ &= \frac{M}{-(s-c)} e^{-(s-c)t} \Big|_T^\infty, \text{ suponiendo que } s-c > 0 \\ &= -\frac{M}{s-c} (0 - e^{-(s-c)T}) = \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)T} \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe, si $s > c$. ■

NOTA: a) cuando $f(t) \leq |f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t \geq T$, entonces decimos que $f(t)$ es de orden exponencial (ver figura 6.1).

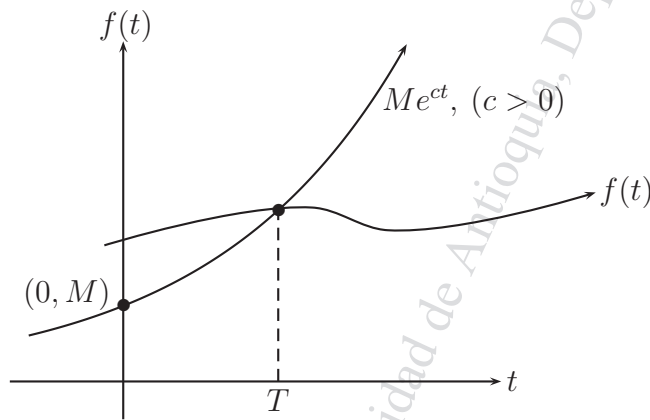


Figura 6.1

b) Si $f(t)$ es de orden exponencial, es decir, $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t \geq T$ y c, M constantes, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0, \quad s > c$$

En efecto, como $|f(t)| \leq Me^{ct}$, entonces $|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-(s-c)t}$ y como $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-c)t} = 0$, si $s > c$, entonces por el teorema de estricción en límites, se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-st}f(t)| = 0, \quad s > c,$$

luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}f(t) = 0, \quad s > c$$

Observación: \mathcal{L} es un operador lineal, en efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) &\stackrel{def.}{=} \int_0^{\infty} e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t)) dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}(s) \end{aligned}$$

Teorema 6.2.

- 1). $\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$, $\mathcal{L}\{k\}(s) = \frac{k}{s}$, $s > 0$, k constante.
- 2). $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$, $n = 1, 2, \dots$
- 3). $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$, para $s > a$
- 4). $\mathcal{L}\{\text{sen } kt\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}$, $s > 0$
- 5). $\mathcal{L}\{\text{cos } kt\}(s) = \frac{s}{s^2+k^2}$, $s > 0$
- 6). $\mathcal{L}\{\text{senh } kt\}(s) = \frac{k}{s^2-k^2}$, $s > |k|$
- 7). $\mathcal{L}\{\text{cosh } kt\}(s) = \frac{s}{s^2-k^2}$, $s > |k|$
- 8). $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$, $n = 1, 2, \dots$

Demostración: 1). Si $s > 0$ se tiene que

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

2). Hagamos la demostración por el método de inducción. Para ello, suponemos

que $s > 0$ y utilizamos el siguiente limite: $\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{t^n}{e^{ct}} \right| = 0, n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} n = 1 : \mathcal{L}\{t\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} t dt, \quad \text{hagamos } \begin{cases} u = t & \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-st} dt & \Rightarrow v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{cases} \\ &= -\frac{te^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\}(s) &= -(0 - 0) + \frac{1}{s} \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{s^2} (0 - 1) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n - 1$ y veamos que se cumple para n . En efecto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^n\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt \quad \text{hagamos } \begin{cases} u = t^n & \Rightarrow du = nt^{n-1} dt \\ dv = e^{-st} dt & \Rightarrow v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{cases} \\ &= -\frac{t^n e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt}_{\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s)} \\ &= -(0 - 0) + \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) \end{aligned}$$

Pero por la hipótesis de inducción $\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = \frac{(n-1)!}{s^n}$, luego:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n(n-1)!}{s \cdot s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

4). Por el método de los operadores inversos, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\text{sen } kt\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} (\text{sen } kt) dt \\ &= \frac{1}{D} e^{-st} \text{sen } kt \Big|_0^{\infty} = e^{-st} \frac{1}{D - s} \text{sen } kt \Big|_0^{\infty} \\ &= e^{-st} \frac{D + s}{D^2 - s^2} \text{sen } kt \Big|_0^{\infty} = e^{-st} \frac{D + s}{-k^2 - s^2} \text{sen } kt \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{s^2 + k^2} e^{-st} (k \cos kt + s \operatorname{sen} kt) \Big|_0^\infty \\
&= -\frac{1}{s^2 + k^2} (0 - k) = \frac{k}{s^2 + k^2}, \quad s > 0
\end{aligned}$$

En la demostración anterior utilizamos el siguiente teorema de límites: si $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = 0$ y $g(t)$ es una función acotada en \mathbb{R} entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)g(t) = 0$. ■

6.2. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Si $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, entonces decimos que $f(t)$ es una transformada inversa de Laplace de $F(s)$ y se denota así:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

NOTA:

- La transformada inversa de Laplace de $F(s)$, no necesariamente es única.

Por ejemplo la función

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \text{ y } t \neq 1, t \neq 2 \\ 3, & \text{si } t = 1 \\ -3, & \text{si } t = 2 \end{cases}$$

y la función $g(t) = 1$ (obsérvese que $f(t) \neq g(t)$) tienen la misma transformada, es decir, $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}$. Sin embargo $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = f(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = g(t)$ son diferentes.

Pero cuando $f(t)$ y $g(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ entonces $f(t) = g(t)$ (Ver el libro de Variable Compleja de Churchill)

- Para funciones continuas, \mathcal{L}^{-1} es un operador lineal:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

- En los ejemplos de esta sección, utilizaremos los resultados del Apéndice C. para calcular fracciones parciales.

Teorema 6.3. Para a y k constantes se tiene:

- 1). $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1$, y $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s} \right\} = k$, si $s > 0$
- 2). $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{n!}{s^{n+1}} \right\} = t^n$ y $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{n+1}} \right\} = \frac{t^n}{n!}$, si $s > 0$
- 3). $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}$, si $s > a$
- 4). $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2+k^2} \right\} = \text{sen } kt$, y $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+k^2} \right\} = \frac{\text{sen } kt}{k}$, si $s > 0$
- 5). $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+k^2} \right\} = \text{cos } kt$, si $s > 0$
- 6). $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2-k^2} \right\} = \text{senh } kt$ y $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2-k^2} \right\} = \frac{\text{senh } kt}{k}$, si $s > |k|$
- 7). $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2-k^2} \right\} = \text{cosh } kt$, si $s > |k|$
- 8). $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \right\} = t^n e^{at}$ y $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \right\} = \frac{t^n e^{at}}{n!}$, si $s > a$

Ejemplo 1. Con factores lineales en el denominador

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1} \right\} \\ &= A \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-3} \right\} + B \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + C \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} \\ &= Ae^{3t} + Be^{-2t} + Ce^t \end{aligned}$$

Pero por fracciones parciales

$$\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1}$$

Para hallar el coeficiente A , eliminamos de la fracción el factor correspondiente a A y en la parte restante sustituimos a s por la raíz asociada a este factor; lo mismo hacemos para los coeficientes B y C .

$$A = \frac{7(3) - 1}{(5)(2)} = 2, \quad B = \frac{7(-2) - 1}{(-5)(-3)} = -1, \quad C = \frac{7(1) - 1}{(-2)(3)} = -1,$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{7s - 1}{(s - 3)(s + 2)(s - 1)} \right\} = 2e^{3t} - e^{-2t} - e^t$$

Ejemplo 2. Con factores lineales repetidos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{s^2(s + 2)^3} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s + 2)^3} + \frac{D}{(s + 2)^2} + \frac{E}{s + 2} \right\} \\ &= A\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} + B\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + C\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 2)^3} \right\} + \\ &\quad + D\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 2)^2} \right\} + E\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 2} \right\} \\ &= At + B(1) + C \frac{t^2 e^{-2t}}{2!} + D \frac{t e^{-2t}}{1!} + E e^{-2t} \\ \frac{s + 1}{s^2(s + 2)^3} &= \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s + 2)^3} + \frac{D}{(s + 2)^2} + \frac{E}{s + 2} \end{aligned}$$

y por los métodos de las fracciones parciales hallamos

$$A = \frac{1}{8}, \quad B = -\frac{1}{16}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = 0, \quad E = \frac{1}{8}, \text{ luego}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{s^2(s + 2)^3} \right\} = \frac{1}{8}t - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \frac{t^2 e^{-2t}}{2!} + \frac{1}{8} e^{-2t}$$

Ejemplo 3. Factores cuadráticos, lo factorizamos en factores lineales en los complejos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 2s + 2)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 2}{s(s - (-1 + i))(s - (-1 - i))} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s - (-1 + i)} + \frac{C}{s - (-1 - i)} \right\} \\ &= A\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + B\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - (-1 + i)} \right\} + C\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - (-1 - i)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A(1) + B e^{(-1+i)t} + C e^{(-1-i)t} \\
&= A + B e^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) + C e^{-t}(\cos t - i \operatorname{sen} t) \\
&= A + e^{-t}[(B + C) \cos t + i(B - C) \operatorname{sen} t]
\end{aligned}$$

Hallamos los coeficientes de la misma manera que en ejemplo 1.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{0^2 + 2}{[0 - (-1 + i)][0 - (-1 - i)]} = \frac{2}{1 + 1} = 1 \\
B &= \frac{(-1 + i)^2 + 2}{(-1 + i)[-1 + i - (-1 - i)]} = -\frac{1}{i} = i \\
C &= \frac{(-1 - i)^2 + 2}{(-1 - i)[-1 - i - (-1 + i)]} = \frac{1}{i} = -i \\
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 2s + 2)} \right\} &= 1 + e^{-t}(0 \cos t + i(2i) \operatorname{sen} t) \\
&= 1 - 2e^{-t} \operatorname{sen} t
\end{aligned}$$

6.3. TEOREMAS SOBRE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Los teoremas que veremos en esta sección nos permitirán en muchos casos calcular la transformada inversa sin utilizar fracciones parciales.

Teorema 6.4.

Si f es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial para $t \geq T$, entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

Demostración: como la función f es continua a tramos en $[0, T]$, entonces es acotada en este intervalo y por tanto $\exists M_1 > 0$ tal que $|f(t)| \leq M_1 e^{0t}$, $\forall t \in [0, T]$ y como $f(t)$ es de orden exponencial para $t \geq T$, entonces $|f(t)| \leq M_2 e^{\gamma t}$ donde M_2 y γ son constantes con $M_2 \geq 0$.

Sea $M = \max\{M_1, M_2\}$ y sea $\alpha = \max\{0, \gamma\}$; por lo tanto, $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, $\forall t \geq 0$.

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_0^\infty e^{-st} M e^{\alpha t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= M \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{-(s-\alpha)} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} \\
&\stackrel{s > \alpha}{=} -\frac{M}{s-\alpha} (0 - 1) = \frac{M}{s-\alpha} \\
&\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} |F(s)| \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{M}{s-\alpha} = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0
\end{aligned}$$

Teorema 6.5 (Primer Teorema de Translación).

Si a es un número real cualquiera, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a) \\
&= F(s-a)
\end{aligned}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt \\
&= \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a) = F(s-a) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

NOTA: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$

Ejemplo 4. $\mathcal{L}\{e^{2t} \sin t\}(s)$

Solución: $\mathcal{L}\{e^{2t} \sin t\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2+1}$

ya que $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

Ejemplo 5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+3}\right\}$

Solución:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \sin \sqrt{2}t$$

Ejemplo 6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}$

Solución:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2+1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{(s+2)^2+1} \right\} - 2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2+1} \right\} = e^{-2t} \cos t - 2e^{-2t} \sin t$$

Definición 6.2 (Función Escalón Unitario). (Ver figura 6.2)

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < a, \\ 1, & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

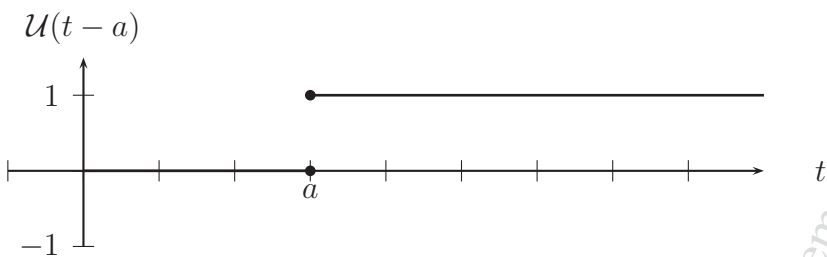


Figura 6.2

Ejemplo 7. Al aplicar $\mathcal{U}(t-\pi)$ a la función $\sin t$ trunca la función $\sin t$ entre 0 y π quedando la función $g(t) = \mathcal{U}(t-\pi) \sin t$ como lo muestra la gráfica 6.3

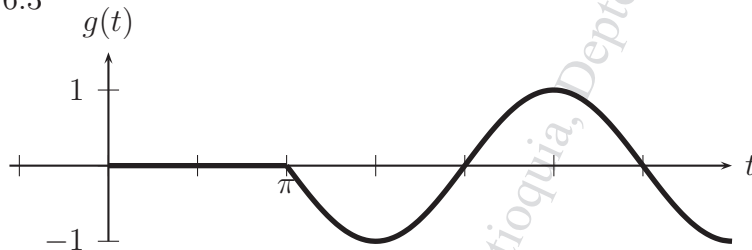


Figura 6.3

Teorema 6.6 (Segundo Teorema de Translación).

Si $a > 0$ y $f(t)$ es continua para $t \geq 0$ y de orden exponencial entonces

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Demostración:

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a e^{-st} \mathcal{U}(t-a) f(t-a) dt + \int_a^\infty e^{-st} \mathcal{U}(t-a) f(t-a) dt \\
&= \int_0^a e^{-st} 0 f(t-a) dt + \int_a^\infty e^{-st} 1 f(t-a) dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt
\end{aligned}$$

Hagamos $u = t - a \Rightarrow du = dt$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u) du \\
&= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \\
&= e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)
\end{aligned}$$

NOTA: forma recíproca

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \mathcal{U}(t-a)f(t-a)$$

Ejemplo 8. Hallar $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\}$

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a) 1\} = e^{-as} \frac{1}{s} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Ejemplo 9. Hallar $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2}) \text{sen } t\}$

Solución:

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \text{sen } t\right\} = \mathcal{L}\left\{\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

pero

$$\begin{aligned}
\text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) &= \text{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{\pi}{2} + \text{sen} \frac{\pi}{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{U}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = e^{-\frac{\pi}{2}s} \mathcal{L}\{\cos t\} = e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{s}{s^2 + 1}$$

Ejemplo 10. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$

Solución:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \frac{1}{s(s+1)}\right\}$$

como

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow A = 1, B = -1 \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-s} \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-s} \frac{1}{s+1} \right\} \\ &= \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-1) e^{-(t-1)} \end{aligned}$$

Teorema 6.7 (Derivada de una Transformada).

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad \text{con } n = 1, 2, \dots,$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

Demostración: por inducción sobre n .

$$n = 1 \quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} (e^{-st} f(t)) dt \\ &= \int_0^\infty -t e^{-st} f(t) dt = - \int_0^\infty e^{-st} (t f(t)) dt \\ &\stackrel{\text{def. } \mathcal{L}}{=} -\mathcal{L}\{t f(t)\}(s) \\ \Rightarrow \mathcal{L}\{t f(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds} F(s) \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n = k$

$$\mathcal{L}\{t^k f(t)\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s)$$

Veamos que se cumple para $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^{k+1} f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t t^k f(t)\}(s) \stackrel{n=k}{=} -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t^k f(t)\}(s) \\ &\stackrel{n=k}{=} -\frac{d}{ds} \left[(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s) \right] \\ &= (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}} F(s) \end{aligned}$$

■

NOTA: para el caso $n = 1$, obtenemos una fórmula que nos permite hallar la transformada inversa de transformadas que no tenemos en la tabla de transformadas.

$$\mathcal{L}\{t f(t)\}(s) = -\frac{d}{ds} F(s)$$

o sea que

$$\begin{aligned} t f(t) &= -\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} \\ f(t) &= -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Hallar $f(t)$ para

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln \frac{s-3}{s+1}\right\} = f(t)$, b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right\} = f(t)$

Solución: a)

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds} F(s)\right\} = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds} \ln \frac{s-3}{s+1}\right\} \\ &= -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s-3} \frac{(s+1)1 - (s-3)1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s-3} \frac{4}{(s+1)^2}\right\} = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-3)(s+1)}\right\} \\ &= -\frac{4}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right\} \end{aligned}$$

utilizando fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-3)(s+1)} &= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4} \\ f(t) &= -\frac{4}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4(s-3)} - \frac{1}{4(s+1)}\right\} \\ &= -\frac{1}{t} (e^{3t} - e^{-t}) = \frac{e^{-t} - e^{3t}}{t} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds} F(s)\right\} = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds} \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1 + \frac{1}{s^2}} \left(-\frac{2}{s^3}\right)\right\} = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{1 + s^2} \left(-\frac{2}{s^3}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2+1)} \right\} = 2\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s-i} + \frac{C}{s+i} \right\} \\
&= 2\frac{1}{t} \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s-i} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{C}{s+i} \right\} \right) \\
&= 2\frac{1}{t} \left(A\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + B\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-i} \right\} + C\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+i} \right\} \right) \\
&= 2\frac{1}{t} (A \cdot 1 + Be^{it} + Ce^{-it}) \\
&= \frac{2}{t} (A + B(\cos t + i \sin t) + C(\cos t - i \sin t))
\end{aligned}$$

pero $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-i} + \frac{C}{s+i}$ entonces $A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$ y $C = \frac{1}{2}$ luego

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{2}{t} \left(1 - \frac{1}{2}(\cos t + i \sin t) - \frac{1}{2}(\cos t - i \sin t) \right) = \\
&= \frac{2}{t} (1 - \cos t)
\end{aligned}$$

Teorema 6.8 (Transformada de la Derivada).

Si $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua a tramos para $t \geq 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Demostración: por inducción sobre n :

para $n = 1$: $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt =$

e integrando por partes y teniendo en cuenta que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$, $s > c$,

$$\begin{aligned}
&= e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\
&= -f(0) + s \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\
&= s F(s) - f(0).
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que se cumple para $n = k$:

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \dots - s f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$$

Veamos que se cumple para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{[f^{(k)}(t)]'\}(s) \\ &\stackrel{n=1}{=} s\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) - f^{(k)}(0) \\ &\stackrel{n=k}{=} s(s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \dots - s f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)) - f^{(k)}(0) \\ &= s^{k+1} F(s) - s^k f(0) - s^{k-1} f'(0) - \dots - s^2 f^{(k-2)}(0) - s f^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0) \blacksquare \end{aligned}$$

NOTA: para resolver E.D. necesitamos, en la mayoría de ejemplos, los casos $n = 1$ y $n = 2$.

Para $n = 1$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) - y(0)$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$

$$n = 2 \quad \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)$$

Definición 6.3 (Producto Convolutivo). Sean f y g funciones continuas a tramos para $t \geq 0$; el producto convolutivo entre las funciones f y g se define así:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

NOTA: haciendo el cambio de variable $u = t - \tau$ en la definición de producto convolutivo se demuestra que: $f * g = g * f$ (o sea que la operación $*$ es conmutativa)

Teorema 6.9 (Transformada del producto convolutivo).

Si f y g son funciones continuas a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = F(s) G(s)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} F(s) &\stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau & G(s) &\stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta) d\beta \\ F(s) G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta) d\beta \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\tau+\beta)s} f(\tau) g(\beta) d\beta d\tau \end{aligned}$$

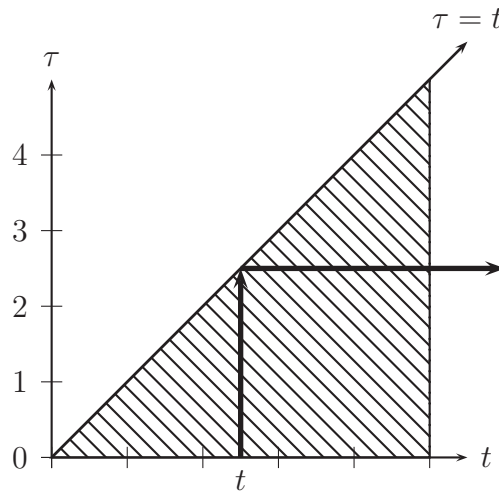


Figura 6.4

$$= \int_0^\infty f(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-(\tau+\beta)s} g(\beta) d\beta \right] d\tau \quad (6.1)$$

Sea $t = \tau + \beta$ dejando constante a τ , luego $dt = d\beta$.

Ahora, cuando $\beta = 0 \Rightarrow t = \tau$ y cuando $\beta \rightarrow \infty$ entonces $t \rightarrow \infty$
Luego en 6.1

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-ts} g(t-\tau) dt \right] d\tau$$

Y como f y g son continuas a tramos, podemos cambiar el orden de integración (ver figura 6.4);

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau) e^{-ts} g(t-\tau) d\tau dt \\ F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-ts} \left[\underbrace{\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau}_{(f * g)(t)} \right] dt = \int_0^\infty e^{-ts} (f * g)(t) dt \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) \end{aligned}$$

■

NOTA: forma recíproca del teorema $(f * g)(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}$

Corolario 6.1 (Transformada de la integral).

Si f es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} (s) = \frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Demostración: tomando $g(t) = 1$ en el teorema de convolución, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}\{(f * g)\} &= \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) 1 d\tau \right\} \\ &= \mathcal{L}\{f(\tau)\}(s) \mathcal{L}\{g(\tau)\}(s) = F(s) \mathcal{L}\{1\}(s) \\ \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} &= F(s) \frac{1}{s} \end{aligned}$$

■

Teorema 6.10 (Generalización de la transformada de una potencia).

$$\mathcal{L}\{t^x\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}, \quad \text{para } s > 0 \text{ y } x > -1$$

Demostración: la función gamma como la definimos en el capítulo anterior es,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{x-1} d\tau$$

hagamos $\tau = st$, por tanto $d\tau = s dt$ y cuando $\tau = 0$ entonces $t = 0$ y con $\tau \rightarrow \infty$ entonces $t \rightarrow \infty$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-st} (st)^{x-1} s dt = s \int_0^\infty e^{-st} s^{x-1} t^{x-1} dt \\ &= s^x \int_0^\infty e^{-st} t^{x-1} dt = s^x \mathcal{L}\{t^{x-1}\} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}\{t^{x-1}\} = \frac{\Gamma(x)}{s^x} \quad \text{con } x > 0 \text{ y } s > 0$$

luego (cambiando x por $x + 1$)

$$\mathcal{L}\{t^x\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \quad \text{con } x+1 > 0 \quad (\text{o sea } x > -1) \quad \text{y } s > 0 \quad \blacksquare$$

Definición 6.4. Una función $f(t)$ se dice que es periódica con período T ($T > 0$) si para todo t se cumple $f(t+T) = f(t)$.

El siguiente teorema se deja como ejercicio.

Teorema 6.11 (Transformada de una función periódica).

Sea $f(t)$ una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial. Si $f(t)$ es periódica con período T , entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Ejemplo 12. Hallar $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau\right\}(s)$

Solución:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{e^{-\tau} \cos \tau\}(s)$$

Pero

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-\tau} \cos \tau\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos \tau\}(s+1) \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2} \\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau\right\}(s) &= \frac{1}{s} \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} \right] \end{aligned}$$

Ejemplo 13. Hallar $\mathcal{L}\{e^{-t} * e^t \cos t\}(s)$

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-t} * e^t \cos t\}(s) &\stackrel{\text{def}^*}{=} \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \mathcal{L}\{e^t \cos t\}(s) \\ &= \frac{1}{s+1} \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} \end{aligned}$$

Observese que el ejemplo siguiente lo resolvemos con los resultados de los teoremas de la transformada y no necesitamos utilizar los dispendiosos métodos

de las fracciones parciales.

Ejemplo 14. Hallar $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2+4)^2} \right\} (t)$

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2+4)^2} \right\} (t) &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2+4} \frac{s}{s^2+4} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (f * g)(t) = \frac{1}{2} (\sin 2t * \cos 2t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2\tau \cos 2(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2\tau (\cos 2t \cos 2\tau + \sin 2t \sin 2\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \cos 2t \int_0^t \sin 2\tau \cos 2\tau d\tau + \frac{1}{2} \sin 2t \int_0^t \sin^2 2\tau d\tau \\ &= \frac{1}{8} \cos 2t \sin^2 2t + \frac{1}{4} t \sin 2t - \frac{1}{16} \sin 2t \sin 4t \end{aligned}$$

Utilizando los teoremas vistos sobre transformada, efectuar los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Hallar $\int_0^\infty e^{-5t} [\int_0^t t e^{3t} \sin 2t dt] dt$
(Rta.: $\frac{1}{40}$)

Ejercicio 2. Mostrar que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^3 + 3s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2s + 2)} \right\} = \frac{3}{2} e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t$$

Ejercicio 3. Mostrar que $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+4s+5} \right\} = e^{-2t} \cos t - 2e^{-2t} \sin t$

Ejercicio 4. Mostrar que $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{2} \right\} = \frac{\sin 2t}{t}$

Ejercicio 5. Mostrar que $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \tan^{-1} \frac{1}{s} \right\} = \frac{\sin t}{t}$

Ejercicio 6. Mostrar que $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \tan^{-1} \frac{3}{s+2} \right\} = \frac{e^{-2t} \sin 3t}{t}$

Ejercicio 7. Mostrar que

a) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2+1)^3} \right\} = \frac{1}{8}(t \sin t - t^2 \cos t)$, b) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \ln \frac{s^2+1}{s^2+4} \right\} = \frac{2}{t}(\cos 2t - \cos t)$

Ejercicio 8. Hallar $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} e^{-\frac{\pi}{2}s} \right\}$
 (Rta.: $-\mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2}) \text{sen } t$)

Ejercicio 9. Hallar $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2+4} e^{-\pi s} \right\}$
 (Rta.: $\frac{1}{2} e^{-2(t-\pi)} \text{sen } 2(t - \pi) \mathcal{U}(t - \pi)$)

Ejercicio 10. Hallar $\mathcal{L} \left\{ t \int_0^t \text{sen } \tau \, d\tau \right\} (s)$
 (Rta.: $\frac{3s^2+1}{s^2(s^2+1)^2}$)

Ejercicio 11. Hallar $\mathcal{L} \left\{ e^{-2t} \int_0^t \tau e^{2\tau} \text{sen } \tau \, d\tau \right\} (s)$
 (Rta.: $\frac{2s}{(s+2)(s^2+1)^2}$)

Ejercicio 12. Hallar $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} \right\}$

Ejercicio 13. Hallar $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2} \right\}$

Ejercicio 14. Mostrar que $\mathcal{L} \{ t^{\frac{5}{2}} \} = \frac{15}{8s^3} \left(\frac{\pi}{s} \right)^{\frac{1}{2}}$

Ejercicio 15. Hallar $\mathcal{L} \{ t^{\frac{5}{2}} e^{2t} \}$

Ejercicio 16. Emplear la transformada de Laplace y su inversa para mostrar que

$$t^m * t^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} t^{m+n+1}$$

Ejercicio 17. Sea $f(t) = \frac{a}{b}t$ de período b (función “serrucho”, ver figura 6.5). Hallar $\mathcal{L} \{ f(t) \} (s)$

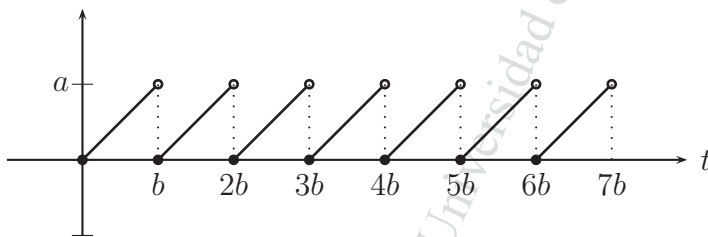


Figura 6.5

(Rta.: $\frac{a}{s} \left(\frac{1}{bs} - \frac{1}{e^{bs}-1} \right)$)

Ejercicio 18. Sea

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen } t, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

periódica de período 2π (función rectificación de la mitad de la onda seno. Ver figura 6.6). Hallar $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

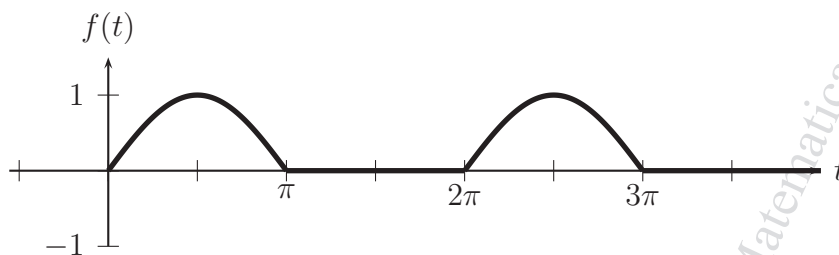


Figura 6.6

(Rta.: $\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$)

Ejercicio 19. Sea

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < a \\ -1, & \text{si } a \leq t < 2a \end{cases}$$

periódica de período $2a$ (función onda cuadrada. Ver figura 6.7). Hallar $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

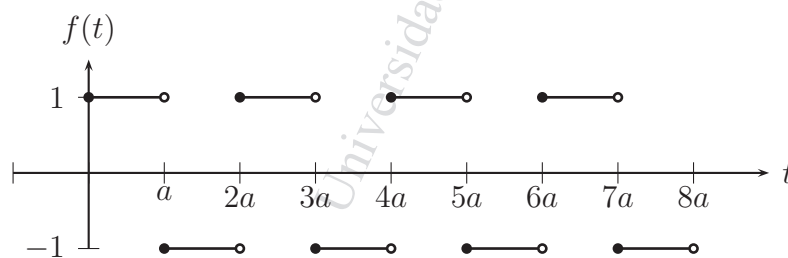


Figura 6.7

(Rta.: $\frac{1}{s}[\frac{2}{1+e^{-as}} - 1] = \frac{1}{s}[\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}] = \frac{1}{s} \tanh \frac{as}{2}$)

Ejercicio 20. Sea

$$f(t) = \begin{cases} b, & \text{si } 0 \leq t < a \\ 0, & \text{si } a \leq t < 2a \\ -b, & \text{si } 2a \leq t < 3a \\ 0, & \text{si } 3a \leq t < 4a \end{cases}$$

periódica de período $4a$

(Rta.: $\frac{b}{s}[\frac{1-e^{-2as}}{1+e^{-2as}}]$)

Ejercicio 21. Sea $f(t)$ la función de onda triangular (ver figura 6.8). Mostrar que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s^2} \tanh \frac{s}{2}$

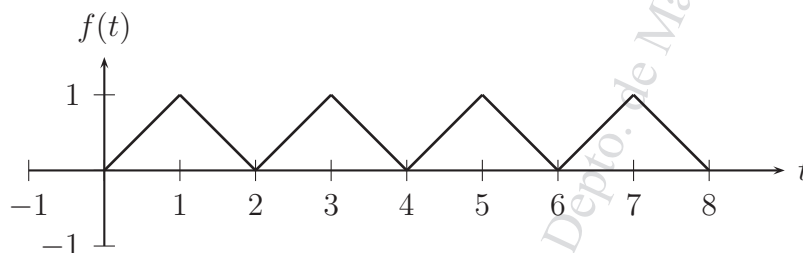


Figura 6.8

Ejercicio 22. Sea $f(t)$ la función rectificación completa de la onda de $\sin t$ (ver figura 6.9). Mostrar que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1} \coth \frac{\pi s}{2}$

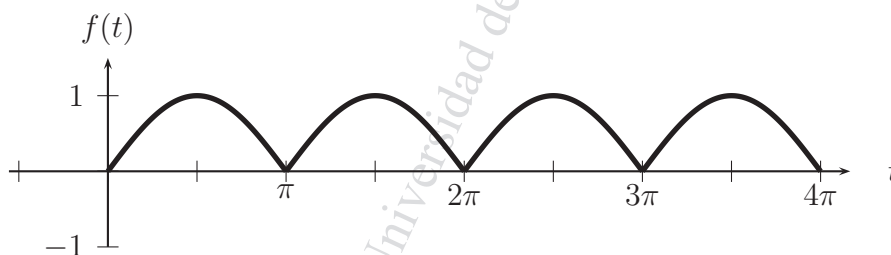


Figura 6.9

Ejercicio 23.

a). Si $f(t)$ es continua a tramos y de orden exponencial y si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$$

existe, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(s) ds$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

b). Mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(s) ds$$

c). Hallar

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \left(\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\right) dx$
(Rta.: $\tan^{-1} \frac{b}{a}$)

2. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$
(Rta.: $\ln \frac{b}{a}$)

3. Mostrar que $\mathcal{L}\left\{\frac{e^t - e^{-t}}{t}\right\} = \ln(s+1) - \ln(s-1)$, con $s > 1$

4. Mostrar que $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{1 - \cos a\tau}{\tau} d\tau\right\} = \frac{1}{2s} \ln \frac{s^2 + a^2}{s^2}$

5. Mostrar formalmente, que si $x > 0$ entonces

a) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt}{t} dt = \frac{\pi}{2}$; b) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-x}$

6. Hallar $\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} kt}{t}\right\}$
(Rta.: $\tan^{-1} \frac{k}{s}$)

Ejercicio 24. Mostrar que

a). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2}\right\} = (t-3)\mathcal{U}(t-3)$

b). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi) = -\operatorname{sen} t \mathcal{U}(t-3)$

c). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right\} = (1-\mathcal{U}(t-2\pi)) \operatorname{sen} t$

d). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s(1+e^{-3s})}{s^2+\pi^2}\right\} = (1 - \mathcal{U}(t-3)) \cos \pi t$

e). Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-se^{-\pi s}}{1+s^2}\right\}$
 (Rta.: $\cos t - \mathcal{U}(t-\pi) \cos(t-\pi)$)

Ejercicio 25. Usando la definición de producto convolutivo, demostrar las siguientes propiedades de este producto:

- Propiedad conmutativa: $f * g = g * f$
- Propiedad asociativa: $(f * g) * h = f * (g * h)$
- Propiedad distributiva: $f * (g + h) = f * g + f * h$

6.4. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA A LAS E.D.

Pasos:

- Aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación

- Aplicar el teorema de la transformada de la derivada

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\text{donde } Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$$

Nota: cuando las condiciones iniciales no están dadas en $t = 0$, sino en $t = a$, se hace el cambio de variable $\tau = t - a$, con este cambio de variable, la nueva E.D. tiene condiciones iniciales en $\tau = 0$.

- Conseguir una función en s , es decir, despejar $Y(s)$

- Hallar la transformada inversa: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

Ejemplo 15. Hallar la solución de $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$, $y(0) = y'(0) = 0$
Solución:

$$\textcircled{1} : \mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^3 e^{2t}\}$$

$$\textcircled{2} : s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$\textcircled{3} : s^2 Y(s) - 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$\textcircled{4} : Y(s) = \frac{\frac{3!}{(s-2)^4}}{s^2 - 4s + 4} = \frac{3!}{(s-2)^4(s-2)^2} = \frac{3!}{(s-2)^6}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{(s-2)^6}\right\} \\ &= \frac{1}{4 \times 5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!(4 \times 5)}{(s-2)^6}\right\} = \frac{1}{4 \times 5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{(s-2)^6}\right\} = \frac{t^5}{20} e^{2t} \end{aligned}$$

Ejemplo 16. Hallar la solución de $y'(t) = 1 - \text{sen } t - \int_0^t y(t) dt$, $y(0) = 0$
Solución:

$$\textcircled{1} : \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s) - \mathcal{L}\{\text{sen } t\}(s) - \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(t) dt\right\}(s)$$

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + 1^2} - \frac{1}{s} Y(s)$$

$$\textcircled{2} : Y(s) \left(s + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) \left(\frac{s^2 + 1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\textcircled{3} : Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + 1}\right) = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

$$\textcircled{4} : y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right\}$$

$$y(t) = \text{sen } t - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1} \frac{s}{s^2 + 1}\right\} = \text{sen } t - \text{sen } t * \text{cos } t$$

$$= \text{sen } t - \int_0^t \text{sen } \tau \text{cos}(t - \tau) d\tau$$

$$= \text{sen } t - \int_0^t \text{sen } \tau (\text{cos } t \text{cos } \tau + \text{sen } \tau \text{sen } t) d\tau$$

$$= \text{sen } t - \text{cos } t \int_0^t \text{sen } \tau \text{cos } \tau d\tau - \text{sen } t \int_0^t \text{sen }^2 \tau d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \text{cos } t \text{sen }^2 t - \frac{1}{2} t \text{sen } t + \frac{1}{4} \text{sen } t \text{sen } 2t$$

Ejemplo 17. Hallar la solución de $ty'' - y' = t^2$, $y(0) = 0$

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty''\}(s) - \mathcal{L}\{y'\}(s) &= \mathcal{L}\{t^2\} \\ (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y''\}(s) - (sY(s) - y(0)) &= \frac{2!}{s^3} \\ -\frac{d}{ds} (s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)) - sY(s) &= \frac{2!}{s^3} \\ -\frac{d}{ds} (s^2 Y(s)) - sY(s) &= \frac{2!}{s^3} \\ -(s^2 Y'(s) + 2sY(s)) - sY(s) &= \frac{2}{s^3} \\ -s^2 Y'(s) - 3sY(s) &= \frac{2}{s^3} \\ Y'(s) + \frac{3}{s} Y(s) &= -\frac{2}{s^5}, \text{ E.D. lineal de primer orden} \\ F.I. e^{\int \frac{3}{s} ds} &= e^{3 \ln s} = s^3 \\ Y(s) s^3 &= \int -\frac{2}{s^5} s^3 ds + C = -2 \frac{s^{-1}}{-1} + C \\ Y(s) &= \frac{2}{s^4} + \frac{C}{s^3} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^4} \right\} + C \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3} \right\} \\ &= 2 \frac{t^3}{3!} + C \frac{t^2}{2!} \end{aligned}$$

Ejemplo 18. Hallar la solución de $ty'' + y = 0$, $y(0) = 0$

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty''\}(s) + Y(s) &= (-1) \frac{d}{ds} (\mathcal{L}\{y''\}(s)) + Y(s) \\ &= -\frac{d}{ds} (s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)) + Y(s) \\ &= -\frac{d}{ds} (s^2 Y(s)) + Y(s) = -(s^2 Y'(s) + 2sY(s)) + Y(s) \\ &= -s^2 Y'(s) - 2sY(s) + Y(s) = s^2 Y'(s) + Y(s)(2s - 1) \\ &= Y'(s) + \left(\frac{2s - 1}{s^2} \right) Y(s) = Y'(s) + \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} \right) Y(s) \end{aligned}$$

$$F.I. = e^{\int (\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}) ds} = e^{2 \ln s - \frac{1}{s-1}},$$

E.D. lineal del primer orden

$$\begin{aligned} F.I. &= s^2 e^{\frac{1}{s}} \\ Y(s) s^2 e^{\frac{1}{s}} &= \int F.I. (0) + C \\ Y(s) &= \frac{C}{s^2} e^{-\frac{1}{s}} = C \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^2} \\ &= C \frac{1}{s^2} \left(1 - \frac{1}{1!} \frac{1}{s} + \frac{1}{2!} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s^n} + \dots \right) \\ Y(s) &= C \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{1!} \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2!} \frac{1}{s^4} - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^5} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s^{n+2}} + \dots \right) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \\ &= C \left(\frac{t}{1!} - \frac{1}{1!} \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!} \frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!} \frac{t^4}{4!} + \frac{1}{4!} \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right) \end{aligned}$$

Resolver los siguientes ejercicios por transformada de Laplace

Ejercicio 1. $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
(Rta.: $y = \frac{1}{20} t^5 e^{2t}$)

Ejercicio 2. $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$
(Rta.: $y = 2e^{3t} + 2\frac{t^4}{4!} e^{3t}$)

Ejercicio 3. $y'' - 2y' + y = e^{t-1}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 5$
(Rta.: $y = 5(t-1)e^{t-1} + \frac{1}{2}(t-1)^2 e^{t-1}$)

Ejercicio 4. $y'' - 6y' + 9y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
(Rta.: $y = \frac{10}{9} t e^{3t} - \frac{2}{27} e^{3t} + \frac{t}{9} + \frac{2}{27}$)

Ejercicio 5. $y'' + y' - 4y - 4 \int_0^t y \, d\tau = 6e^t - 4t - 6$, $y(0) = y'(0) = 0$
(Rta.: $y(t) = 1 - e^t - \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$)

Ejercicio 6. Hallar $f(t)$ para la siguiente ecuación integral

$$f(t) + \int_0^t f(\tau) \, d\tau = 1$$

(Rta.: $f(t) = e^{-t}$)

Ejercicio 7. $y'(t) + 6y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 1$, $y(0) = 0$
 (Rta.: $y = te^{-3t}$)

Ejercicio 8. $y'(t) - 6y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = t$, $y(0) = 0$
 (Rta.: $y = \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{1}{9}e^{3t} + \frac{1}{9}$)

Ejercicio 9. $y'(t) + 6y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = t$, $y(0) = 0$
 (Rta.: $y = -\frac{t}{3}e^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9}$)

Ejercicio 10. $y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau$, $y(0) = 1$
 (Rta.: $y = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$)

Ejercicio 11. $ty'' + 2ty' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$
 (Rta.: $y(t) = 3te^{-2t}$)

Ejercicio 12. $ty'' - ty' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$
 (Rta.: $y(t) = 3te^t$)

Ejercicio 13. $ty'' + 4ty' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$
 (Rta.: $y = 2te^{-4t}$)

Ejercicio 14. $t^2y'' + 2ty' + t^2y = 0$
 (Rta.: $y = -C \frac{\operatorname{sen} t}{t}$)

Ejercicio 15. $ty'' + y = 12t$, $y(0) = 0$
 (Rta.: $y(t) = 12t + C(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!} \frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!} \frac{t^4}{4!} + \frac{1}{4!} \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \dots)$)

Ejercicio 16. $y'' + 4y = f(t)$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$
 $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$
 (Rta.: $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2t}{4} - \frac{1}{2} \mathcal{U}(t-1) \operatorname{sen} 2(t-1) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$)

Ejercicio 17. $y'' + 4y = f(t)$ donde $f(t) = \operatorname{sen} t \mathcal{U}(t - 2\pi)$
 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
 (Rta.: $y(t) = \cos 2t + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(t - 2\pi) \mathcal{U}(t - 2\pi) - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2(t - 2\pi) \mathcal{U}(t - 2\pi)$)

Ejercicio 18. $y'' - 5y' + 6y = \mathcal{U}(t - 1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
 (Rta.: $y(t) = e^{3t} - e^{2t} + \mathcal{U}(t - 1)[\frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{3(t-1)} - \frac{1}{2}e^{2(t-1)}]$)

Ejercicio 19. $y'' - y' = e^t \cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
(Rta: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \sin t$)

Ejercicio 20. Hallar $f(t)$ si:

i. $f(t) + \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau = t$
(Rta: $f(t) = \sin t$)

ii. $f(t) + 4 \int_0^t \sin \tau f(t - \tau) d\tau = 2t$

iii. $f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t - \tau) d\tau$
(Rta: $f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{4}te^t + \frac{1}{4}t^2e^t$)

iv. $f(t) + \int_0^t f(\tau) d\tau = e^t$
(Rta: $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$)

v. $f(t) + \int_0^t f(\tau) d\tau = t$
(Rta: $f(t) = -e^{-t} + 1$)

Ejercicio 21. Sea $x(t)$ la solución de la ecuación de Bessel de orden cero

$$tx'' + x' + tx = 0$$

tal que $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$. Demostrar que

a. $\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{J_0(t)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$,

b. Mostrar formalmente $\int_0^\infty J_0(x) dx = 1$,

c. Mostrar formalmente $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt$
(Ayuda: $\int_0^\pi \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \pi$)

6.5. IMPULSO UNITARIO O “FUNCIÓN DELTA” DE DIRAC

En muchos sistemas mecánicos, eléctricos, etc; aparecen fuerzas externas muy grandes que actúan en intervalos de tiempo muy pequeños, por ejemplo

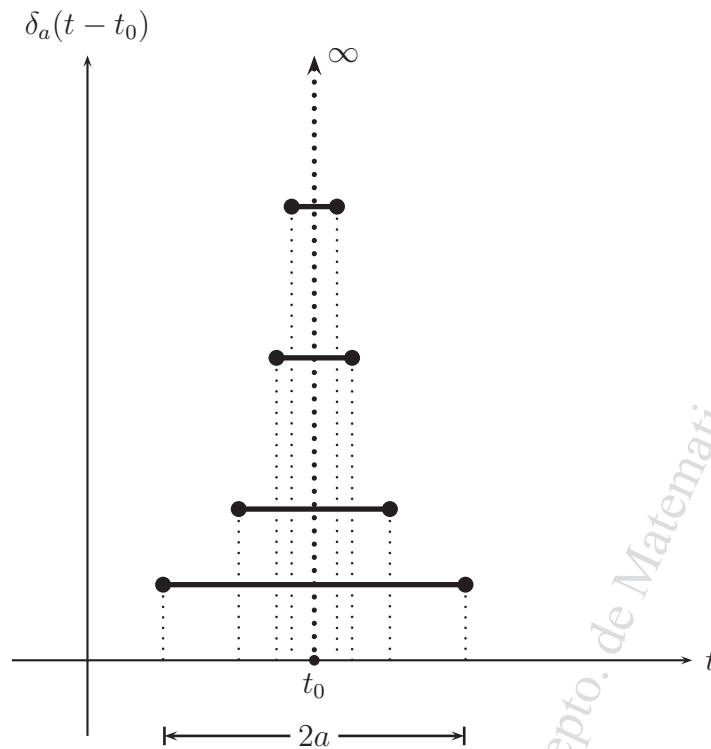


Figura 6.11

Propiedades:

1. $\delta(t - t_0)$ es infinita en $t = t_0$ y cero para $t \neq t_0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$
3. $\mathcal{L}\{\delta_a(t - t_0)\}(s) = e^{-st_0} \left(\frac{e^{sa} - e^{-sa}}{2as} \right)$
4. $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}(s) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\delta_a(t - t_0)\}(s) \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} e^{-st_0}$
5. si $t_0 = 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0), \text{ en particular } \int_0^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

$$7. \text{ Por 6. podemos decir que } \mathcal{L}\{f(t)\delta(t - t_0)\}(s) = e^{-t_0 s} f(t_0)$$

Notar que en la propiedad 5. $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = 1$, mientras que por teorema anterior vimos que cuando una función es de orden exponencial $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = 0$, lo cual es una contradicción, esto nos indica que la “función” δ -Dirac no es de orden exponencial, es por esto que δ es una “función” extraña. Más precisamente, esta función es tratada con detenimiento en los textos de Teoría de Distribuciones (Ver texto de Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais de Djairo Guedes de Figueiredo)

Ejercicio 1. $y'' + y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(Rta: $y(t) = \sin t + \sin(t - 2\pi)\mathcal{U}(t - 2\pi)$)

Ejercicio 2. $y'' + 2y' + 2y = \cos t \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
(Rta: $y(t) = e^{-t} \cos t - e^{-(t-3\pi)} \sin(t - 3\pi)\mathcal{U}(t - 3\pi)$)

Ejercicio 3. $y'' + y = \delta(t - \pi) \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(Rta: $y = [1 + \mathcal{U}(t - \pi)] \sin t$)

Ejercicio 4. $y'' + 2y' = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(Rta: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} + [\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2(t-1)}] \mathcal{U}(t - 1)$)

Ejercicio 5. $y'' + 4y' + 5y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(Rta: $y = e^{-2(t-2\pi)} \sin t \mathcal{U}(t - 2\pi)$)

Ejercicio 6. $y'' + y = e^t \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(Rta: $y = e^{2\pi} \sin(t - 2\pi) \mathcal{U}(t - 2\pi)$)

Ejercicio 7. $y'' - 2y' = 1 + \delta(t - 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(Rta: $y = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} e^{2t} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \mathcal{U}(t - 2) + \frac{1}{2} e^{2(t-2)} \mathcal{U}(t - 2)$)

6.6. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 19. Utilizando el Paquete Maple, descomponer en fracciones parciales las siguientes expresiones: a) $F(s) = \frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(a-1)}$, b) $F(s) =$

$$\frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}, \text{ c) } F(s) = \frac{s^2-16}{s^3(s+2)^2}, \text{ d) } F(s) = \frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s^2+2s+2)}, \text{ e) } F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$$

```
a). >F1(s) := (7*s-1)/((s-3)*(s+2)*(s-1));
>convert(F1(s),parfrac,s);
```

$$F1(s) := \frac{7s - 1}{(s - 3)(s + 2)(s - 1)}$$

$$\frac{2}{s - 3} - \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s + 2}$$

```
b). >F2(s) := (2*s+4)/((s-2)*(s^2+4*s+3));
>convert(F2(s),parfrac,s);
```

$$F2(s) := \frac{2s + 4}{(s - 2)(s^2 + 4s + 3)}$$

$$\frac{8}{15(s - 2)} - \frac{1}{5(s + 3)} - \frac{1}{3(s + 1)}$$

```
c). >F2(s) := (2*s+4)/((s-2)*(s^2+4*s+3));
>convert(F2(s),parfrac,s);
```

$$F3(s) := \frac{s^2 - 16}{s^3(s + 2)^2}$$

$$-\frac{11}{4s} + \frac{11}{4(s + 2)} - \frac{4}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{3}{2(s + 2)^2}$$

```
d). >F4(s) := (s^3+3*s^2+1)/(s^2*(s^2+2*s+2));
>convert(F4(s),parfrac,s,complex);
```

$$F4(s) := \frac{s^3 + 3s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

$$-\frac{0,5000000000}{s} + \frac{0,7500000000 + 1,000000000I}{s + 1,000000000 + 1,000000000I} +$$

$$+ \frac{0,7500000000 - 1,000000000I}{s + 1. - 1.I} + \frac{0,5000000000}{s^2}$$

```
>convert(%,fraction);
```

$$-\frac{1}{(2s)} + \frac{\left(\frac{3}{4} + I\right)}{(s+1+I)} + \frac{\left(\frac{3}{4} - I\right)}{(s+1-I)} + \frac{1}{(2s^2)}$$

e). `>F5(s) := (s^2)/((s^2+1)^2);`
`>convert(F5(s),parfrac,s,complex);`

$$F5(s) := \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2}$$

$$\frac{0,2500000000}{(s + 1,000000000I)^2} + \frac{0,2500000000}{(s - 1.I)^2} - \frac{0,2500000000I}{s - 1.I} + \frac{0,2500000000I}{s + 1,000000000I}$$

`>convert(%,fraction);`

$$\frac{1}{4(s+I)^2} + \frac{1}{4(s-I)^2} - \frac{\frac{1}{4}I}{s-I} + \frac{\frac{1}{4}I}{s+I}$$

Ejemplo 20. Hallar la transformada de Laplace de las funciones: $\sin(kt)$, $\cos(kt)$, e^{kt}

Efectuar las siguientes instrucciones:

`>with(inttrans):laplace(cos(k*t),t,s);`

$$\frac{s}{s^2 + k^2}$$

`>with(inttrans):laplace({sin(k*t),exp(k*t)},t,s);`

$$\frac{1}{s-k}, \quad \frac{k}{s^2+k^2}$$

Ejemplo 21. Hallar la transformada de $e^t \sin(2t)$ y calcular la transformada inversa de $\frac{2}{(s-1)^2+4}$

Efectuar las siguientes instrucciones:

`>with(inttrans):laplace(exp(t)*sin(2*t),t,s);`

$$\frac{2}{(s-1)^2+4}$$

```
>invlaplace(%,s,t);
```

$$e^t \operatorname{sen}(2t)$$

Ejemplo 22. Resolver, usando transformada de Laplace, la E.D.

$$x'' + 16x = \cos 4t$$

con $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

Efectúe las siguientes instrucciones:

```
>with(ODEtools):Eqn2:=D(D(x))(t)+16*x(t)=cos(4*t):
dsolve({Eqn2,x(0)=0,D(x)(0)=1},x(t),method=laplace);
```

$$x(t) = \left(\frac{t}{8} + \frac{1}{4}\right) \operatorname{sen}(4t)$$

Ejemplo 23. Resolver, usando transformada de Laplace, la ecuación integro-diferencial $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(\tau) d\tau$ con la condición $y(0) = 0$

Efectuar los siguientes instrucciones:

```
>with(ODEtools):Eqn2:=D(y)(t)=1-sin(t)-int(y(s),s=0..t):
dsolve({Eqn2,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(t),method=laplace);
```

$$y(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right) \operatorname{sen}(t)$$

Ejemplo 24. Resolver, usando transformada de Laplace, la E.D. $y' + y = U(t-1)$ con la condición $y(0) = 0$ (U es la función escalón unitario)

Efectuar los siguientes pasos:

```
>restart: with(ODEtools): ode := diff(y(t),t) + y(t) =
5*piecewise(t<1,0,t>=1,1):dsolve({ode,y(0)=0},y(t),method=laplace);
```

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \operatorname{undefind} & t = 1 \\ -5e^{(1-t)} + 5 & t > 1 \end{cases}$$