CAPÍTULO 6

TRANSFORMADA DE LAPLACE

6.1. INTRODUCCION

Definición 6.1. *Sea $f(t)$ una función definida para todo $t \geq 0$; se define la* **Transformada de Laplace** *de $f(t)$ así:*

$$\begin{aligned}
\pounds\{f(t)\}(s) = F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt,
\end{aligned}$$

si el límite existe.

Teorema 6.1.

Si $f(t)$ es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y además $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t \geq T$, donde M es constante , $c > 0$ constante y $T > 0$ constante, entonces $\pounds\{f(t)\}(s)$ existe para $s > c$.

Demostración: veamos que la siguiente integral existe, en efecto:

$$\begin{aligned}
|\pounds\{f(t)\}(s)| &= \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_0^\infty |e^{-st}||f(t)|dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt, \qquad \text{sabiendo que } e^{-st} > 0
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\int_0^T e^{-st}|f(t)|dt}_{I_1} + \underbrace{\int_T^\infty e^{-st}|f(t)|dt}_{I_2}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T e^{-st}|f(t)|dt \quad \text{existe, ya que } \ f \text{ es continua a tramos} \\
I_2 &= \int_T^\infty e^{-st} \underbrace{|f(t)|}_{\leq Me^{ct}} \, dt \leq \int_T^\infty e^{-st} M e^{ct} dt = M \int_T^\infty e^{(-s+c)t} \, dt \\
&= \frac{M}{-(s-c)} \, e^{-(s-c)t}\Big|_T^\infty, \text{ suponiendo que } s - c > 0 \\
&= -\frac{M}{s-c}(0 - e^{-(s-c)T}) = \frac{M}{s-c} \, e^{-(s-c)T}
\end{aligned}$$

Luego, $\pounds\{f(t)\}(s)$ existe, si $s > c$. ■

NOTA: a) cuando $f(t) \leq |f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t \geq T$, entonces decimos que $f(t)$ es de orden exponencial (ver figura 6.1).

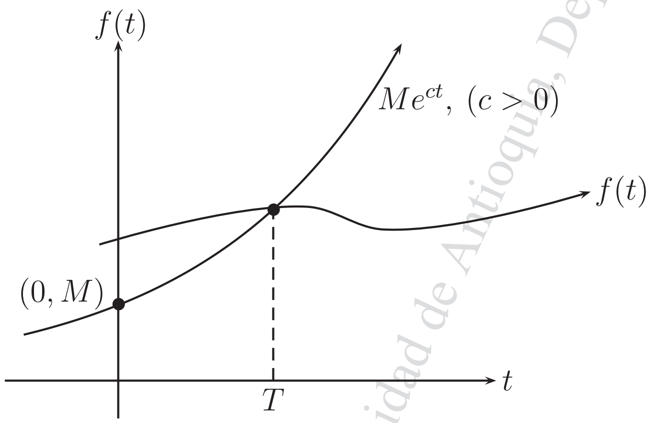

Figura 6.1

b) Si $f(t)$ es de orden exponencial, es decir, $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t \geq T$ y c, M constantes, entonces

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0, \ s > c$$

En efecto, como $|f(t)| \leq Me^{ct}$, entonces $|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-(s-c)t}$ y como $\lim_{t\to\infty} e^{-(s-c)t} = 0$, si $s > c$, entonces por el teorema de estricción en límites, se concluye que

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-st}f(t)| = 0,\ \ s > c,$$

luego

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) = 0,\ \ s > c$$

Observación: $\pounds$ es un operador lineal, en efecto

$$\begin{aligned}
\pounds\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) &\overset{def.}{=} \int_0^\infty e^{-st}\,(\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt \\
&= \alpha\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt + \beta\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \\
&= \alpha\pounds\{f(t)\}(s) + \beta\pounds\{g(t)\}(s)
\end{aligned}$$

Teorema 6.2.

1). $\pounds\{1\}(s) = \frac{1}{s}$ $\ , s > 0,$ $\quad \pounds\{k\}(s) = \frac{k}{s}\ , s > 0,$ $\quad k$ *constante.*

2). $\pounds\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\ ,\quad s > 0,\ n = 1, 2, \ldots$

3). $\pounds\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}\ ,$ $\quad$ *para* $s > a$

4). $\pounds\{\operatorname{sen} kt\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}\ ,\quad s > 0$

5). $\pounds\{\cos kt\}(s) = \frac{s}{s^2+k^2}\ ,\quad s > 0$

6). $\pounds\{\operatorname{senh} kt\}(s) = \frac{k}{s^2-k^2}\ ,\quad s > |k|$

7). $\pounds\{\cosh kt\}(s) = \frac{s}{s^2-k^2}\ ,\quad s > |k|$

8). $\pounds\{t^n\, e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\ ,\quad s > a,\ n = 1, 2, \ldots$

Demostración: 1). Si $s > 0$ se tiene que

$$\pounds\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,1\,dt\ =\ \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

2). Hagamos la demostración por el método de inducción. Para ello, suponemos que $s > 0$ y utilizamos el siguiente limite: $\lim\limits_{t\to\infty} |\frac{t^n}{e^{ct}}| = 0, n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} n=1: \pounds\{t\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, t\, dt, \quad \text{hagamos} \left\{\begin{array}{ll} u = t & \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-st}\, dt & \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array}\right. \\ &= -\frac{te^{-st}}{s}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pounds\{t\}(s) &= -(0-0) + \frac{1}{s}\,\frac{1}{-s}\, e^{-st}\Big|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{s^2}(0-1) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n-1$ y veamos que se cumple para n. En efecto:

$$\begin{aligned} \pounds\{t^n\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt \;\; \text{hagamos} \left\{\begin{array}{ll} u = t^n & \Rightarrow du = nt^{n-1}\, dt \\ dv = e^{-st}\, dt & \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array}\right. \\ &= -\frac{t^n\, e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty + \frac{n}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}\, dt}_{\pounds\{t^{n-1}\}(s)} \\ &= -(0-0) + \frac{n}{s}\pounds\{t^{n-1}\}(s) = \frac{n}{s}\pounds\{t^{n-1}\}(s) \end{aligned}$$

Pero por la hipótesis de inducción $\pounds\{t^{n-1}\}(s) = \frac{(n-1)!}{s^n}$, luego:

$$\pounds\{t^n\}(s) = \frac{n}{s}\frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

4). Por el método de los operadores inversos, tenemos:

$$\begin{aligned} \pounds\{\operatorname{sen} kt\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(\operatorname{sen} kt)\, dt \\ &= \frac{1}{D}e^{-st}\operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty = e^{-st}\frac{1}{D-s}\operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty \end{aligned}$$

$$= e^{-st}\frac{D+s}{D^2-s^2}\operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty = e^{-st}\frac{D+s}{-k^2-s^2}\operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{s^2+k^2}\, e^{-st}(k\cos kt + s\operatorname{sen} kt)\Big|_0^\infty \\
&= -\frac{1}{s^2+k^2}\,(0-k) = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad s>0
\end{aligned}$$

En la demostración anterior utilizamos el siguiente teorema de límites: si $\lim_{t\to\infty} |f(t)| = 0$ y $g(t)$ es una función acotada en $\mathbb{R}$ entonces $\lim_{t\to\infty} f(t)g(t) = 0$. ■

6.2. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Si $\pounds\{f(t)\}(s) = F(s)$, entonces decimos que $f(t)$ es una transformada inversa de Laplace de $F(s)$ y se denota así:

$$\pounds^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

NOTA:

- La transformada inversa de Laplace de $F(s)$, no necesariamente es única.
  Por ejemplo la función
  $$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \text{ y } t \neq 1,\ t \neq 2 \\ 3, & \text{si } t = 1 \\ -3, & \text{si } t = 2 \end{cases}$$
  y la función $g(t) = 1$ (obsérvese que $f(t) \neq g(t)$) tienen la misma transformada, es decir, $\pounds\{f(t)\} = \pounds\{g(t)\} = \frac{1}{s}$. Sinembargo $\pounds^{-1}\{\frac{1}{s}\} = f(t)$ y $\pounds^{-1}\{\frac{1}{s}\} = g(t)$ son diferentes.
  Pero cuando $f(t)$ y $g(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y $\pounds\{f(t)\} = \pounds\{g(t)\}$ entonces $f(t) = g(t)$ (Ver el libro de Variable Compleja de Churchill)

- Para funciones continuas, $\pounds^{-1}$ es un operador lineal:
  $$\pounds^{-1}\{\alpha F(s) + \beta\, G(s)\} = \alpha \pounds^{-1}\{F(s)\} + \beta \pounds^{-1}\{G(s)\}$$

- En los ejemplos de esta sección, utilizaremos los resultados del Apéndice C. para calcular fracciones parciales.

Teorema 6.3. *Para a y k constantes se tiene:*

1). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}=1,\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\dfrac{k}{s}\right\}=k\ ,\ si\ \ s>0$

2). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\}=t^n\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{n+1}}\right\}=\dfrac{t^n}{n!}\ ,\ si\ \ s>0$

3). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}=e^{at}\ ,\ si\ \ s>a$

4). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2+k^2}\right\}=\operatorname{sen} kt,\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+k^2}\right\}=\dfrac{\operatorname{sen} kt}{k}\ ,\ si\ \ s>0$

5). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k^2}\right\}=\cos kt\ ,\ si\ \ s>0$

6). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2-k^2}\right\}=\operatorname{senh} kt\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-k^2}\right\}=\dfrac{\operatorname{senh} kt}{k}\ ,\ si\ \ s>|k|$

7). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-k^2}\right\}=\cosh kt\ ,\ si\ \ s>|k|$

8). $\pounds^{-1}\left\{\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\}=t^n\,e^{at}\ y\ \pounds^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\}=\dfrac{t^n\,e^{at}}{n!}\ ,\ si\ \ s>a$

Ejemplo 1. Con factores lineales en el denominador

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\} &= \pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-1}\right\}\\
&= A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}+B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}\\
&= Ae^{3t}+Be^{-2t}+Ce^{t}
\end{aligned}$$

Pero por fracciones parciales

$$\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-1}$$

Para hallar el coeficiente A, eliminamos de la fracción el factor correspondiente a A y en la parte restante sustituimos a s por la raíz asociada a este factor; lo mismo hacemos para los coeficientes B y C.

$$A = \frac{7\,(3) - 1}{(5)\,(2)} = 2\ ,\ B = \frac{7\,(-2) - 1}{(-5)\,(-3)} = -1\ ,\ C = \frac{7\,(1) - 1}{(-2)\,(3)} = -1,$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\} = 2e^{3t} - e^{-2t} - e^{t}$$

Ejemplo 2. Con factores lineales repetidos

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} &= \pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s+2)^3} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{s+2}\right\} \\
&= A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\} + \\
&\quad + D\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} + E\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\
&= A\,t + B\,(1) + C\,\frac{t^2\,e^{-2t}}{2!} + D\,\frac{t\,e^{-2t}}{1!} + E\,e^{-2t} \\
\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} &= \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s+2)^3} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{s+2}
\end{aligned}$$

y por los métodos de las fracciones parciales hallamos

$A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{16}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = 0$, $E = \frac{1}{8}$, luego

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} = \frac{1}{8}\,t - \frac{1}{16} - \frac{1}{4}\,\frac{t^2\,e^{-2t}}{2!} + \frac{1}{8}\,e^{-2t}$$

Ejemplo 3. Factores cuadráticos, lo factorizamos en factores lineales en los complejos

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= \pounds^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s(s-(-1+i))(s-(-1-i))}\right\} \\
&= \pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s-(-1+i)} + \frac{C}{s-(-1-i)}\right\}
\end{aligned}$$

$$= A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1+i)}\right\} + C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1-i)}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= A\,(1) + B\,e^{(-1+i)t} + Ce^{(-1-i)t} \\
&= A + Be^{-t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) + C\,e^{-t}(\cos t - i \operatorname{sen} t) \\
&= A + e^{-t}[(B+C)\cos t + i(B-C)\operatorname{sen} t]
\end{aligned}$$

Hallamos los coeficientes de la misma manera que en ejemplo 1.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{0^2+2}{[0-(-1+i)][0-(-1-i)]} = \frac{2}{1+1} = 1 \\
B &= \frac{(-1+i)^2+2}{(-1+i)[-1+i-(-1-i)]} = -\frac{1}{i} = i \\
C &= \frac{(-1-i)^2+2}{(-1-i)[-1-i-(-1+i)]} = \frac{1}{i} = -i \\
\pounds^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= 1 + e^{-t}(0\cos t + i(2i)\operatorname{sen} t) \\
&= 1 - 2e^{-t}\operatorname{sen} t
\end{aligned}$$

6.3. TEOREMAS SOBRE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Los teoremas que veremos en esta sección nos permitirán en muchos casos calcular la transformada inversa sin utilizar fracciones parciales.

Teorema 6.4.

Si f es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial para $t \geq T$, entonces

$$\lim_{s\to\infty} \pounds\{f(t)\}(s) = \lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Demostración: como la función f es continua a tramos en $[0,T]$, entonces es acotada en este intervalo y por tanto $\exists M_1 > 0$ tal que $|f(t)| \leq M_1\,e^{0t}, \quad \forall t \in [0,T]$ y como $f(t)$ es de orden exponencial para $t \geq T$, entonces $|f(t)| \leq M_2\,e^{\gamma t}$ donde M_2 y γ son constantes con $M_2 \geq 0$.
Sea $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$ y sea $\alpha = \text{máx}\{0,\gamma\}$; por lo tanto, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, $\forall t \geq 0$.

$$|F(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-st}\,|f(t)|\,dt \leq \int_0^\infty e^{-st}\,Me^{\alpha t}\,dt$$

$$\begin{aligned}
&= M\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\,dt = \frac{1}{-(s-\alpha)}\,e^{-(s-\alpha)}\Big|_0^\infty \\
&\overset{s\geq\alpha}{=} -\frac{M}{s-\alpha}\,(0-1) = \frac{M}{s-\alpha} \\
&\Rightarrow \lim_{s\to\infty}|F(s)| \leq \lim_{s\to\infty}\frac{M}{s-\alpha} = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{s\to\infty} F(s) = 0
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Teorema 6.5 (Primer Teorema de Translación).

Si a es un número real cualquiera, entonces

$$\begin{aligned}
£\left\{e^{at}\,f(t)\right\}(s) &= £\left\{f(t)\right\}(s-a) \\
&= F(s-a)
\end{aligned}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
£\{e^{at}\,f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\,e^{at}\,f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,f(t)\,dt \\
&= £\{f(t)\}(s-a) = F(s-a) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

NOTA: $£^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}\,f(t)$

Ejemplo 4. $£\{e^{2t}\operatorname{sen} t\}(s)$

Solución: $£\{e^{2t}\operatorname{sen} t\}(s) = £\{\operatorname{sen} t\}(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2+1}$

ya que $£\{\operatorname{sen} t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

Ejemplo 5. $£^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+3}\right\}$

Solución:

$$£^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+3}\right\} = £^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^t\operatorname{sen}\sqrt{2}t$$

Ejemplo 6. $£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}$

Solución:

$$£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} = £^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2+1}\right\}$$

$$= \pounds^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} - 2\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} = e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\,\operatorname{sen} t$$

Definición 6.2 (Función Escalón Unitario)**.** (Ver figura 6.2)

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le t < a, \\ 1, & \text{si} \quad t \ge a \end{cases}$$

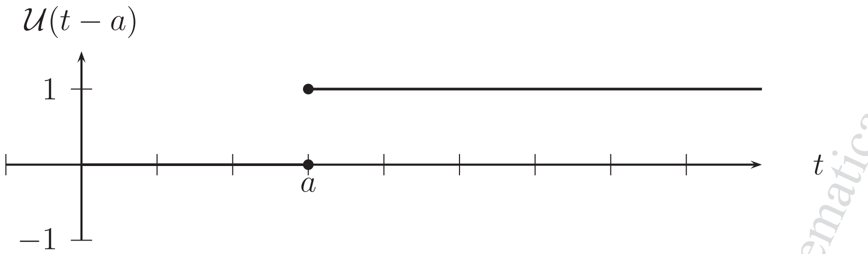

Figura 6.2

Ejemplo 7. Al aplicar $\mathcal{U}(t-\pi)$ a la función $\operatorname{sen} t$ trunca la función $\operatorname{sen} t$ entre 0 y π quedando la función $g(t) = \mathcal{U}(t-\pi)\operatorname{sen} t$ como lo muestra la gráfica 6.3

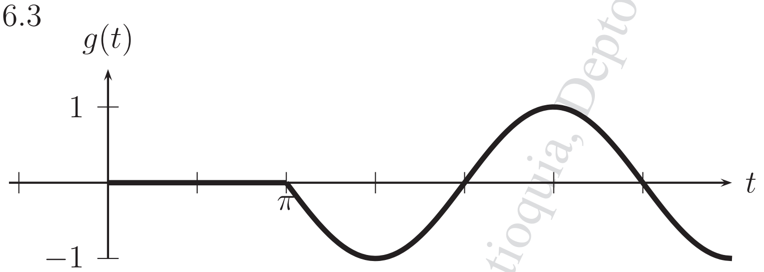

Figura 6.3

Teorema 6.6 (Segundo Teorema de Translación).

Si $a > 0$ y $f(t)$ es continua para $t \ge 0$ y de orden exponencial entonces

$$\pounds\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) = e^{-as}\pounds\{f(t)\}(s)$$

Demostración:

$$\pounds\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\,dt =$$

$$= \int_0^a e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\,dt$$
$$= \int_0^a e^{-st}0f(t-a)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}1f(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt$$

Hagamos $u = t-a \Rightarrow du = dt$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\pounds\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)\,du\\ &= e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du\\ &= e^{-as}\pounds\{f(t)\}(s)\end{aligned}$$ ■

NOTA: forma recíproca

$$\pounds^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \mathcal{U}(t-a)f(t-a)$$

Ejemplo 8. Hallar $\pounds\{\mathcal{U}(t-a)\}$

$$\pounds\{\mathcal{U}(t-a)\} = \pounds\{\mathcal{U}(t-a)\,1\} = e^{-as}\,\frac{1}{s} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Ejemplo 9. Hallar $\pounds\{\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})\operatorname{sen} t\}$
Solución:

$$\pounds\left\{\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} t\right\} = \pounds\left\{\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

pero

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$
$$\pounds\left\{\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\pounds\{\cos t\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\frac{s}{s^2+1}$$

Ejemplo 10. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$
Solución:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{e^{-s}\,\frac{1}{s(s+1)}\right\}$$

como

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow\; A = 1,\; B = -1$$
$$= \pounds^{-1}\left\{e^{-s}\,\frac{1}{s}\right\} - \pounds^{-1}\left\{e^{-s}\,\frac{1}{s+1}\right\}$$
$$= \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-1)\,e^{-(t-1)}$$

Teorema 6.7 (Derivada de una Transformada).

$\pounds\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n\,\frac{d^n}{ds^n}\,F(s),\quad$ *con* $n = 1, 2, \ldots,$
donde $F(s) = \pounds\{f(t)\}(s)$

Demostración: por inducción sobre n.

$n = 1 \qquad F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt$

$$\begin{aligned}
\frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\,(e^{-st}\,f(t))\,dt \\
&= \int_0^\infty -t\,e^{-st}\,f(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{-st}(t\,f(t))\,dt \\
&\overset{\text{def.}\pounds}{=} -\pounds\{t\,f(t)\}(s) \\
\Rightarrow \pounds\{t\,f(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\,F(s)
\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n = k$

$$\pounds\{t^k\,f(t)\}(s) = (-1)^k\,\frac{d^k}{ds^k}\,F(s)$$

Veamos que se cumple para $n = k+1$

$$\begin{aligned}
\pounds\{t^{k+1}\,f(t)\}(s) &= \pounds\{t\,t^k\,f(t)\}(s) \overset{n=1}{=} -\frac{d}{ds}\,\pounds\{t^k\,f(t)\}(s) \\
&\overset{n=k}{=} -\frac{d}{ds}[(-1)^k\,\frac{d^k}{ds^k}\,F(s)] \\
&= (-1)^{k+1}\,\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}\,F(s)
\end{aligned}$$

■

NOTA: para el caso $n = 1$, obtenemos una fórmula que nos permite hallar la transformada inversa de transformadas que no tenemos en la tabla de transformadas.

$$\pounds\{t\,f(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\,F(s)$$

o sea que

$$\begin{aligned} t\,f(t) &= -\pounds^{-1}\{F'(s)\} \\ f(t) &= -\frac{1}{t}\pounds^{-1}\{F'(s)\} \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Hallar $f(t)$ para
a)$\pounds^{-1}\left\{\ln\frac{s-3}{s+1}\right\} = f(t)$, b)$\pounds^{-1}\left\{\ln(1+\frac{1}{s^2})\right\} = f(t)$
<u>Solución</u>: a)

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\,F(s)\right\} = -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\,\ln\,\frac{s-3}{s+1}\right\} \\ &= -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s-3}\,\frac{(s+1)1-(s-3)1}{(s+1)^2}\right\} \\ &= -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s-3}\,\frac{4}{(s+1)^2}\right\} = -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{4}{(s-3)(s+1)}\right\} \\ &= -\frac{4}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right\} \end{aligned}$$

utilizando fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-3)(s+1)} &= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4} \\ f(t) &= -\frac{4}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{4(s-3)} - \frac{1}{4(s+1)}\right\} \\ &= -\frac{1}{t}\,(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{e^{-t} - e^{3t}}{t} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\,F(s)\right\} = -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\,\ln(1+\frac{1}{s^2})\right\} \\ &= -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{s^2}}\left(-\frac{2}{s^3}\right)\right\} = -\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{s^2}{1+s^2}\left(-\frac{2}{s^3}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 2\frac{1}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s-i}+\frac{C}{s+i}\right\}\\
&= 2\frac{1}{t}\left(\pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{B}{s-i}\right\}+\pounds^{-1}\left\{\frac{C}{s+i}\right\}\right)\\
&= 2\frac{1}{t}\left(A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-i}\right\}+C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+i}\right\}\right)\\
&= 2\frac{1}{t}\left(A\cdot 1+Be^{it}+Ce^{-it}\right)\\
&= \frac{2}{t}(A+B(\cos t+i\operatorname{sen} t)+C(\cos t-i\operatorname{sen} t))
\end{aligned}
$$

pero $\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-i}+\frac{C}{s+i}$ entonces $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$ y $C=-\frac{1}{2}$ luego

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{2}{t}(1-\frac{1}{2}(\cos t+i\operatorname{sen} t)-\frac{1}{2}(\cos t-i\operatorname{sen} t)) =\\
&= \frac{2}{t}(1-\cos t)
\end{aligned}
$$

Teorema 6.8 (Transformada de la Derivada).

Si $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua a tramos para $t \geq 0$, entonces:

$$\pounds\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Demostración: por inducción sobre n:

para $n=1$: $\pounds\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt =$

e integrando por partes y teniendo en cuenta que $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$, $s > c$,

$$
\begin{aligned}
&= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\\
&= -f(0) + s\pounds\{f(t)\}(s)\\
&= s\,F(s) - f(0).
\end{aligned}
$$

Ahora supongamos que se cumple para $n = k$:

$\pounds\{f^{(k)}(t)\}(s) = s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \ldots - s f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$

Veamos que se cumple para $n = k+1$:

$$
\begin{aligned}
£\{f^{(k+1)}(t)\}(s) &= £\{[f^{(k)}(t)]'\}(s) \\
&\overset{n=1}{=} s£\{f^{(k)}(t)\}(s) - f^{(k)}(0) \\
&\overset{n=k}{=} s(s^k F(s) - s^{k-1} f(0) - s^{k-2} f'(0) - \ldots - s f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)) - f^{(k)}(0) \\
&= s^{k+1} F(s) - s^k f(0) - s^{k-1} f'(0) - \ldots - s^2 f^{(k-2)}(0) - s f^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

NOTA: para resolver E.D. necesitamos, en la mayoría de ejemplos, los casos $n = 1$ y $n = 2$.
Para $n = 1$

$$£\{y'(t)\}(s) = s\,Y(s) - y(0)$$

donde $Y(s) = £\{y(t)\}(s)$

$$n = 2 \quad £\{y''(t)\}(s) = s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$

Definición 6.3 (Producto Convolutivo). *Sean f y g funciones continuas a tramos para $t \geq 0$; el producto convolutivo entre las funciones f y g se define así:*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

NOTA: haciendo el cambio de variable $u = t - \tau$ en la definición de producto convolutivo se demuestra que: $f * g = g * f$ (o sea que la operación $*$ es conmutativa)

Teorema 6.9 (Transformada del producto convolutivo).
Si f y g son funciones continuas a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces

$$£\{(f * g)(t)\}(s) = £\{f(t)\}(s)\,£\{g(t)\}(s) = F(s)\,G(s)$$

Demostración:

$$F(s) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau \qquad G(s) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)\,d\beta$$

$$
\begin{aligned}
F(s)\,G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)\,d\beta \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\tau+\beta)s} f(\tau)\,g(\beta)\,d\beta\,d\tau
\end{aligned}
$$

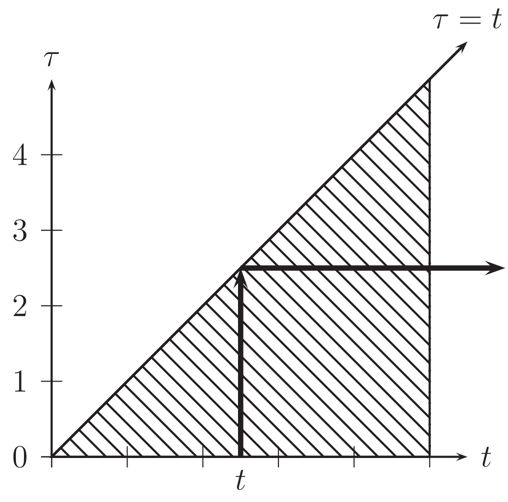

Figura 6.4

$$= \int_0^\infty f(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-(\tau+\beta)s}\, g(\beta)\, d\beta \right] d\tau \tag{6.1}$$

Sea $t = \tau + \beta$ dejando constante a τ, luego $dt = d\beta$.
Ahora, cuando $\beta = 0 \Rightarrow t = \tau$ y cuando $\beta \to \infty$ entonces $t \to \infty$
Luego en 6.1

$$F(s)\, G(s) = \int_0^\infty f(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-ts}\, g(t-\tau)\, dt \right] d\tau$$

Y como f y g son continuas a tramos, podemos cambiar el orden de integración (ver figura 6.4);

$$\begin{aligned}
F(s)\, G(s) &= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)\, e^{-ts}\, g(t-\tau)\, d\tau\, dt \\
F(s)\, G(s) &= \int_0^\infty e^{-ts} \left[\underbrace{\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau}_{(f*g)(t)} \right] dt = \int_0^\infty e^{-ts}\, (f*g)(t)\, dt \\
&\overset{\text{def.}}{=} \pounds\{(f*g)(t)\}\,(s)
\end{aligned}$$

■

NOTA: forma recíproca del teorema $(f * g)(t) = \pounds^{-1}\{F(s)\,G(s)\}$

Corolario 6.1 (Transformada de la integral).
Si f es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces:

$$\pounds\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\}(s) = \frac{1}{s}\,F(s) = \frac{1}{s}\,\pounds\{f(t)\}(s)$$

Demostración: tomando $g(t) = 1$ en el teorema de convolución, tenemos

$$\begin{aligned}
\pounds\{g(t)\}(s) &= \pounds\{1\}(s) = \frac{1}{s} \\
\pounds\{(f * g)\} &= \pounds\left\{\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right\} = \pounds\left\{\int_0^t f(\tau)\,1\,d\tau\right\} \\
&= \pounds\{f(\tau)\}(s)\;\pounds\{g(\tau)\}(s) = F(s)\pounds\{1\}(s) \\
\pounds\left\{\int_0^t f(\tau)\;d\tau\right\} &= F(s)\,\frac{1}{s}
\end{aligned}$$

■

Teorema 6.10 (Generalización de la transformada de una potencia).

$\pounds\{t^x\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$, *para* $s > 0$ *y* $x > -1$

Demostración: la función gamma como la definimos en el capítulo anterior es,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{x-1}\,d\tau$$

hagamos $\tau = st$, por tanto $d\tau = s\;dt$ y cuando $\tau = 0$ entonces $t = 0$ y con $\tau \to \infty$ entonces $t \to \infty$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-st}(st)^{x-1}s\;dt &= s\int_0^\infty e^{-st}s^{x-1}t^{x-1}\;dt \\
&= s^x\int_0^\infty e^{-st}t^{x-1} = s^x\pounds\{t^{x-1}\}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\pounds\{t^{x-1}\} = \frac{\Gamma(x)}{s^x} \quad \text{con } x > 0 \text{ y } s > 0$$

luego (cambiando x por $x+1$)

$$\pounds\{t^x\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \quad \text{con} \quad x+1>0 \quad (\text{o sea} \quad x>-1) \quad \text{y} \quad s>0 \qquad \blacksquare$$

Definición 6.4. *Una función $f(t)$ se dice que es periódica con período T ($T>0$) si para todo t se cumple $f(t+T)=f(t)$.*

El siguiente teorema se deja como ejercicio.

Teorema 6.11 (Transformada de una función periódica).

Sea $f(t)$ una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial. Si $f(t)$ es periódica con período T, entonces:

$$\pounds\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

Ejemplo 12. Hallar $\pounds\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos\tau\, d\tau\right\}(s)$

<u>Solución</u>:

$$\pounds\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos\tau\, d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}\pounds\{e^{-\tau}\cos\tau\}(s)$$

Pero

$$\begin{aligned} \pounds\{e^{-\tau}\cos\tau\}(s) &= \pounds\{\cos\tau\}(s+1) \\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} \\ \pounds\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos\tau\, d\tau\right\}(s) &= \frac{1}{s}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right] \end{aligned}$$

Ejemplo 13. Hallar $\pounds\{e^{-t} * e^t \cos t\}(s)$

<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned} \pounds\{e^{-t} * e^t \cos t\}(s) &\overset{def *}{=} \pounds\{e^{-t}\}(s)\, \pounds\{e^t\cos t\}(s) \\ &= \frac{1}{s+1}\,\frac{s-1}{(s-1)^2+1} \end{aligned}$$

Observese que el ejemplo siguiente lo resolvemos con los resultados de los teoremas de la transformada y no necesitamos utilizar los dispendiosos métodos de las fracciones parciales.

Ejemplo 14. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t)$

<u>Solución</u>:

$$
\begin{aligned}
&\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) = \frac{1}{2}\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\,\frac{s}{s^2+4}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\,(f*g)(t) = \frac{1}{2}\,(\operatorname{sen} 2t * \cos 2t) \overset{\text{def. }*}{=} \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} 2\tau\ \cos 2(t-\tau)\,d\tau\\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} 2\tau(\cos 2t\ \cos 2\tau + \operatorname{sen} 2t\ \operatorname{sen} 2\tau)\,d\tau\\
&= \frac{1}{2}\cos 2t \int_0^t \operatorname{sen} 2\tau \cos 2\tau\,d\tau + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\int_0^t \operatorname{sen}^2 2\tau\,d\tau\\
&= \frac{1}{8}\cos 2t \operatorname{sen}^2 2t + \frac{1}{4}t\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2t\operatorname{sen} 4t
\end{aligned}
$$

Utilizando los teoremas vistos sobre transformada, efectuar los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Hallar $\int_0^\infty e^{-5t}[\int_0^t te^{3t}\operatorname{sen} 2t\ dt]\ dt$
(**Rta.:** $\frac{1}{40}$)

Ejercicio 2. Mostrar que

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s^2+2s+2)}\right\} = \frac{3}{2}\,e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t$$

Ejercicio 3. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} = e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\operatorname{sen} t$

Ejercicio 4. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{2}\right\} = \frac{\operatorname{sen} 2t}{t}$

Ejercicio 5. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$

Ejercicio 6. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{3}{s+2}\right\} = \frac{e^{-2t}\operatorname{sen} 3t}{t}$

Ejercicio 7. Mostrar que
a) $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^3}\right\} = \frac{1}{8}(t\operatorname{sen} t - t^2\cos t)$, b) $\pounds^{-1}\left\{\ln\frac{s^2+1}{s^2+4}\right\} = \frac{2}{t}(\cos 2t - \cos t)$

Ejercicio 8. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\}$
(**Rta.:** $-\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})\operatorname{sen} t)$)

Ejercicio 9. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+4}e^{-\pi s}\right\}$
(**Rta.:** $\frac{1}{2}e^{-2(t-\pi)}\operatorname{sen} 2(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)$)

Ejercicio 10. Hallar $\mathcal{L}\left\{t\int_0^t \operatorname{sen}\tau\, d\tau\right\}(s)$
(**Rta.:** $\frac{3s^2+1}{s^2(s^2+1)^2}$)

Ejercicio 11. Hallar $\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\int_0^t \tau e^{2\tau}\operatorname{sen}\tau\, d\tau\right\}(s)$
(**Rta.:** $\frac{2s}{(s+2)(s^2+1)^2}$)

Ejercicio 12. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

Ejercicio 13. Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$

Ejercicio 14. Mostrar que $\mathcal{L}\{t^{\frac{5}{2}}\} = \frac{15}{8s^3}\left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$

Ejercicio 15. Hallar $\mathcal{L}\{t^{\frac{5}{2}}e^{2t}\}$

Ejercicio 16. Emplear la transformada de Laplace y su inversa para mostrar que

$$t^m * t^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}$$

Ejercicio 17. Sea $f(t) = \frac{a}{b}t$ de período b (función "serrucho", ver figura 6.5). Hallar $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

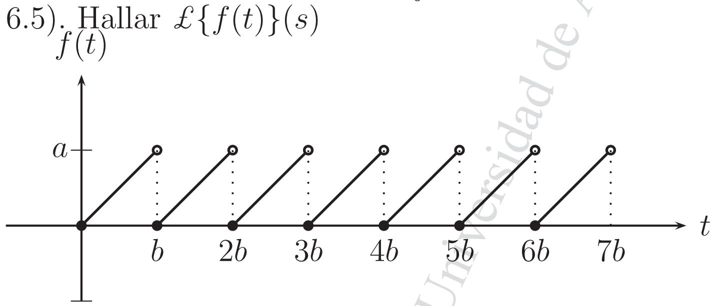

Figura 6.5

(**Rta.:** $\frac{a}{s}(\frac{1}{bs} - \frac{1}{e^{bs-1}})$)

Ejercicio 18. Sea

$$f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen} t, & \text{si } 0\leq t\leq \pi\\ 0, & \text{si } \pi\leq t\leq 2\pi\end{cases}$$

periódica de período 2π (función rectificación de la mitad de la onda seno. Ver figura 6.6). Hallar $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

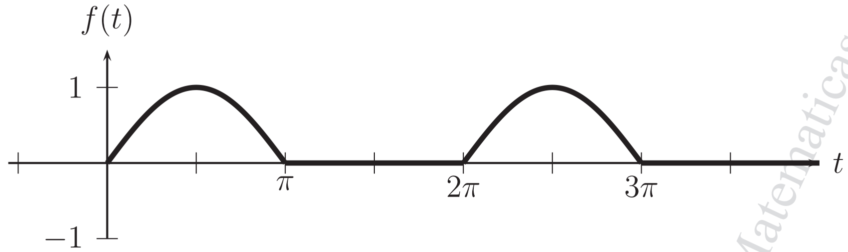

Figura 6.6

(**Rta.:**$\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$)

Ejercicio 19. Sea

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{si } 0\leq t< a\\ -1, & \text{si } a\leq t< 2a\end{cases}$$

periódica de período $2a$ (función onda cuadrada. Ver figura 6.7). Hallar $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

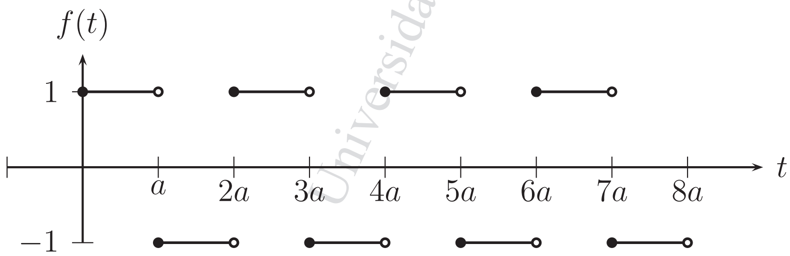

Figura 6.7

(**Rta.:** $\frac{1}{s}[\frac{2}{1+e^{-as}}-1]=\frac{1}{s}[\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}]=\frac{1}{s}\tanh\frac{as}{2}$)

Ejercicio 20. Sea

$$f(t)=\begin{cases} b, & \text{si } 0\leq t<a\\ 0, & \text{si } a\leq t<2a\\ -b, & \text{si } 2a\leq t<3a\\ 0, & \text{si } 3a\leq t<4a\end{cases}$$

periódica de período $4a$
(**Rta.:** $\frac{b}{s}[\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-2as}}]$)

Ejercicio 21. Sea $f(t)$ la función de onda triángular (ver figura 6.8). Mostrar que $\pounds\{f(t)\}(s)=\frac{1}{s^2}\tanh\frac{s}{2}$

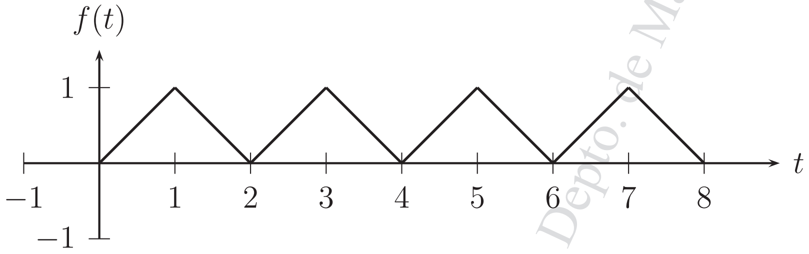

Figura 6.8

Ejercicio 22. Sea $f(t)$ la función rectificación completa de la onda de $\operatorname{sen} t$ (ver figura 6.9). Mostrar que $\pounds\{f(t)\}(s)=\frac{1}{s^2+1}\coth\frac{\pi s}{2}$

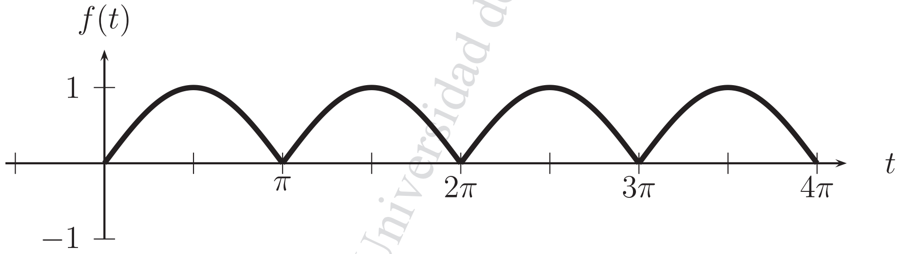

Figura 6.9

Ejercicio 23.

a). Si $f(t)$ es continua a tramos y de orden exponencial y si

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$$

existe, entonces

$$\pounds\{\frac{f(t)}{t}\}(s) = \int_s^\infty F(s)\,ds$$

donde $F(s) = \pounds\{f(t)\}(s)$

b). Mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(s)\,ds$$

c). Hallar

1. $\int_0^\infty e^{-ax}(\frac{\operatorname{sen} bx}{x})\,dx$
   (**Rta.:** $\tan^{-1}\frac{b}{a}$)
2. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$
   (**Rta.:**$\ln\frac{b}{a}$)
3. Mostrar que $\pounds\{\frac{e^t-e^{-t}}{t}\} = \ln(s+1) - \ln(s-1)$, con $s > 1$
4. Mostrar que $\pounds\{\int_0^t \frac{1-\cos a\tau}{\tau}\,d\tau\} = \frac{1}{2s}\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}$
5. Mostrar formalmente, que si $x > 0$ entonces
   a) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$; b) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}e^{-x}$
6. Hallar $\pounds\{\frac{\operatorname{sen} kt}{t}\}$
   (**Rta.:** $\tan^{-1}\frac{k}{s}$)

Ejercicio 24. Mostrar que

a). $\pounds^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{s^2}\} = (t-3)\mathcal{U}(t-3)$

b). $\pounds^{-1}\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\} = \operatorname{sen}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi) = -\operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t-3)$

c). $\pounds^{-1}\{\frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}\} = (1-\mathcal{U}(t-2\pi))\operatorname{sen} t$

d). $\pounds^{-1}\{\frac{s(1+e^{-3s})}{s^2+\pi^2}\} = (1-\mathcal{U}(t-3))\cos\pi t$

e). Hallar $\pounds^{-1}\{\frac{s-se^{-\pi s}}{1+s^2}\}$
(**Rta.:** $\cos t - \mathcal{U}(t-\pi)\cos(t-\pi)$)

Ejercicio 25. Usando la definición de producto convolutivo, demostrar las siguientes propiedades de este producto:

a. Propiedad conmutativa: $f * g = g * f$

b. Propiedad asociativa: $(f * g) * h = f * (g * h)$

c. Propiedad distributiva: $f * (g + h) = f * g + f * h$

6.4. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA A LAS E.D.

Pasos:

- Aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación
- Aplicar el teorema de la transformada de la derivada
  $\pounds\{y'\} = sY(s) - y(0)$
  $\pounds\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
  donde $Y(s) = \pounds\{y(t)\}(s)$
  Nota: cuando las condiciones iniciales no estan dadas en $t = 0$, sino en $t = a$, se hace el cambio de variable $\tau = t - a$, con este cambio de variable, la nueva E.D. tiene condiciones iniciales en $\tau = 0$.
- Conseguir una función en s, es decir, despejar $Y(s)$
- Hallar la transformada inversa: $y(t) = \pounds^{-1}\{Y(s)\}$

Ejemplo 15. Hallar la solución de $y''-4y'+4y = t^3\,e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
Solución:

$$① \quad : \quad \pounds\{y''\} - 4\pounds\{y'\} + 4\pounds\{y\} = \pounds\{t^3\,e^{2t}\}$$

$$② \quad : \quad s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$③ \quad : \quad s^2Y(s) - 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$④ \quad : \quad Y(s) = \frac{\frac{3!}{(s-2)^4}}{s^2-4s+4} = \frac{3!}{(s-2)^4(s-2)^2} = \frac{3!}{(s-2)^6}$$

$$y(t) = £^{-1}\{Y(s)\} = £^{-1}\left\{\frac{3!}{(s-2)^6}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\times 5}\, £^{-1}\left\{\frac{3!\,(4\times 5)}{(s-2)^6}\right\} = \frac{1}{4\times 5}\, £^{-1}\left\{\frac{5!}{(s-2)^6}\right\} = \frac{t^5}{20}\, e^{2t}$$

Ejemplo 16. Hallar la solución de $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(t)\,dt, \quad y(0) = 0$
Solución:

$$① \quad : \quad £\{y'(t)\}(s) = £\{1\}(s) - £\{\operatorname{sen} t\}(s) - £\left\{\int_0^t y(t)\,dt\right\}(s)$$

$$s\,Y(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1^2} - \frac{1}{s}\,Y(s)$$

$$② \quad : \quad Y(s)\left(s + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)\left(\frac{s^2+1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$③ \quad : \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$$④ \quad : \quad y(t) = £^{-1}\{Y(s)\} = £^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - £^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t - £^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\,\frac{s}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t * \cos t$$

$$= \operatorname{sen} t - \int_0^t \operatorname{sen}\tau \cos(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \operatorname{sen} t - \int_0^t \operatorname{sen}\tau(\cos t\cos\tau + \operatorname{sen}\tau\operatorname{sen} t)\,d\tau$$

$$= \operatorname{sen} t - \cos t\int_0^t \operatorname{sen}\tau\cos\tau\,d\tau - \operatorname{sen} t\int_0^t \operatorname{sen}^2\tau\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\cos t\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t$$

Ejemplo 17. Hallar la solución de $ty'' - y' = t^2, \quad y(0) = 0$
<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}
\pounds\{ty''\}(s) - \pounds\{y'\}(s) &= \pounds\{t^2\}\\
(-1)\,\frac{d}{ds}\,\pounds\{y''\}(s) - (s\,Y(s) - y(0)) &= \frac{2!}{s^3}\\
-\frac{d}{ds}\,(s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0)) - s\,Y(s) &= \frac{2!}{s^3}\\
-\frac{d}{ds}\,(s^2Y(s)) - sY(s) &= \frac{2!}{s^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(s^2\,Y'(s) + 2sY(s)) - s\,Y(s) &= \frac{2}{s^3}\\
-s^2Y'(s) - 3sY(s) &= \frac{2}{s^3}\\
Y'(s) + \frac{3}{s}\,Y(s) &= -\frac{2}{s^5}\,, \quad \text{E.D. lineal de primer orden}\\
F.I\; e^{\int \frac{3}{s}\,ds} &= e^{3\ln s} = s^3\\
Y(s)\,s^3 &= \int -\frac{2}{s^5}\,s^3\,ds + C = -2\,\frac{s^{-1}}{-1} + C\\
Y(s) &= \frac{2}{s^4} + \frac{C}{s^3}\\
y(t) &= \pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\} + C\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}\\
&= 2\,\frac{t^3}{3!} + C\,\frac{t^2}{2!}
\end{aligned}$$

Ejemplo 18. Hallar la solución de $ty'' + y = 0, \quad y(0) = 0$
<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}
\pounds\{ty''\}(s) + Y(s) &= (-1)\,\frac{d}{ds}\,(\pounds\{y''\}(s)) + Y(s)\\
&= -\frac{d}{ds}\,(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s)\\
&= -\frac{d}{ds}\,(s^2Y(s)) + Y(s) = -(s^2Y'(s) + 2sY(s)) + Y(s)\\
&= -s^2Y'(s) - 2sY(s) + Y(s) = s^2Y'(s) + Y(s)(2s-1)\\
&= Y'(s) + \left(\frac{2s-1}{s^2}\right)\,Y(s) = Y'(s) + \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}\right)\,Y(s)
\end{aligned}$$

$$F.I. = e^{\int \left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}\right) ds} = e^{2\ln s - \frac{s^{-1}}{-1}},$$

E.D. lineal del primer orden

$$\begin{aligned}
F.I. &= s^2\, e^{\frac{1}{s}}\\
Y(s)\, s^2\, e^{\frac{1}{s}} &= \int F.I.\,(0) + C\\
Y(s) = \frac{C}{s^2}\, e^{-\frac{1}{s}} &= C\,\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^2}\\
&= C\,\frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{1}{1!}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{s^3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{s^n} + \ldots\right)\\
Y(s) &= C\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{1!}\,\frac{1}{s^3} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{s^4} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{s^5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{s^{n+2}} + \ldots\right)\\
y(t) &= \pounds^{-1}\{Y(s)\}\\
&= C\left(\frac{t}{1!} - \frac{1}{1!}\,\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!}\,\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!}\,\frac{t^4}{4!} + \frac{1}{4!}\ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

Resolver los siguientes ejercicios por transformada de Laplace

Ejercicio 1. $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(**Rta.:** $y = \frac{1}{20} t^5 e^{2t}$)

Ejercicio 2. $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$
(**Rta.:** $y = 2e^{3t} + 2\frac{t^4}{4!} e^{3t}$)

Ejercicio 3. $y'' - 2y' + y = e^{t-1}, \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 5$
(**Rta.:** $y = 5(t-1)e^{t-1} + \frac{1}{2}(t-1)^2 e^{t-1}$)

Ejercicio 4. $y'' - 6y' + 9y = t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta.:** $y = \frac{10}{9} t e^{3t} - \frac{2}{27} e^{3t} + \frac{t}{9} + \frac{2}{27}$)

Ejercicio 5. $y'' + y' - 4y - 4\int_0^t y\, d\tau = 6e^t - 4t - 6, \qquad y(0) = y'(0) = 0$
(**Rta.:** $y(t) = 1 - e^t - \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$)

Ejercicio 6. Hallar $f(t)$ para la siguiente ecuación integral

$$f(t) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau = 1$$

(**Rta.:** $f(t) = e^{-t}$)

Ejercicio 7. $y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 1, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y = te^{-3t}$)

Ejercicio 8. $y'(t) - 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\,d\tau = t, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y = \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{1}{9}e^{3t} + \frac{1}{9}$)

Ejercicio 9. $y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\,d\tau = t, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y = -\frac{t}{3}e^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9}$)

Ejercicio 10. $y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\ d\tau, \quad y(0) = 1$
(**Rta.:** $y = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$)

Ejercicio 11. $ty'' + 2ty' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
(**Rta.:** $y(t) = 3te^{-2t}$)

Ejercicio 12. $ty'' - ty' - y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
(**Rta.:** $y(t) = 3te^{t}$)

Ejercicio 13. $ty'' + 4ty' + 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$
(**Rta.:** $y = 2te^{-4t}$)

Ejercicio 14. $t^2y'' + 2ty' + t^2y = 0$
(**Rta.:** $y = -C\frac{\operatorname{sen} t}{t}$)

Ejercicio 15. $ty'' + y = 12t, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y(t) = 12t + C(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!}\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!}\frac{t^4}{4!} + \frac{1}{4!}\frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots)$)

Ejercicio 16. $y'' + 4y = f(t)$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$
(**Rta.:** $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2t}{4} - \frac{1}{2}\mathcal{U}(t-1)\operatorname{sen} 2(t-1) - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$)

Ejercicio 17. $y'' + 4y = f(t)$ donde $f(t) = \operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t - 2\pi)$
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
(**Rta:** $y(t) = \cos 2t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t-2\pi)\,\mathcal{U}(t-2\pi) - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2(t-2\pi)\,\mathcal{U}(t-2\pi)$)

Ejercicio 18. $y'' - 5y' + 6y = \mathcal{U}(t-1),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
(**Rta.:** $y(t) = e^{3t} - e^{2t} + \mathcal{U}(t-1)[\frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{3(t-1)} - \frac{1}{2}e^{2(t-1)}]$)

Ejercicio 19. $y'' - y' = e^t \cos t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
(**Rta:** $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} t$)

Ejercicio 20. Hallar $f(t)$ si:

i. $f(t) + \int_0^t (t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = t$
(**Rta:** $f(t) = \operatorname{sen} t$)

ii. $f(t) + 4\int_0^t \operatorname{sen} \tau\, f(t-\tau)\, d\tau = 2t$

iii. $f(t) = te^t + \int_0^t \tau\, f(t-\tau)\, d\tau$
(**Rta:** $f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{4}te^t + \frac{1}{4}t^2 e^t$)

iv. $f(t) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau = e^t$
(**Rta:** $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$)

v. $f(t) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau = t$
(**Rta:** $f(t) = -e^{-t} + 1$)

Ejercicio 21. Sea $x(t)$ la solución de la ecuación de Bessel de orden cero

$$tx'' + x' + tx = 0$$

tal que $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$. Demostrar que

a. $\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{J_0(t)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$,

b. Mostrar formalmente $\int_0^\infty J_0(x)\, dx = 1$,

c. Mostrar formalmente $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \cos t)\, dt$
(**Ayuda:** $\int_0^\pi \cos^{2n} x\, dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\pi$)

6.5. IMPULSO UNITARIO O "FUNCIÓN DELTA"DE DIRAC

En muchos sistemas mecánicos, eléctricos, etc; aparecen fuerzas externas muy grandes que actúan en intervalos de tiempo muy pequeños, por ejemplo un golpe de martillo en un sistema mecánico, o un relámpago en un sistema eléctrico. La forma de representar esta fuerza exterior es con la "función δ"-Dirac.

Definición 6.5. $\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\,, & si\ \ t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \\ 0\,, & si\ \ t < t_0 - a \quad o \quad t > t_0 + a \end{cases}$
donde a y t_0 son constantes positivas y $t_0 \geq a$.

Nota: para todo $a > 0$ y para todo $t_0 > 0$ se cumple que (Ver figura 6.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t-t_0) = 1$$

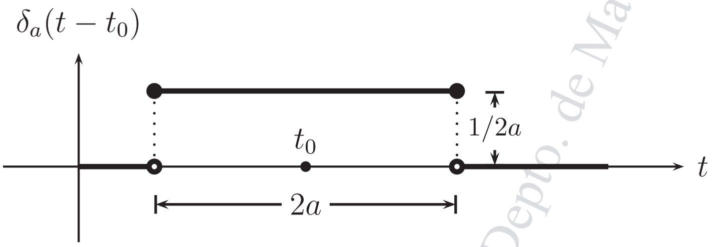

Figura 6.10

Definición 6.6. *Se llama impulso unitario ó función delta de Dirac a la "función"definida por el límite:*

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0} \delta_a(t-t_0)$$

Ver figura 6.11 en la página siguiente.

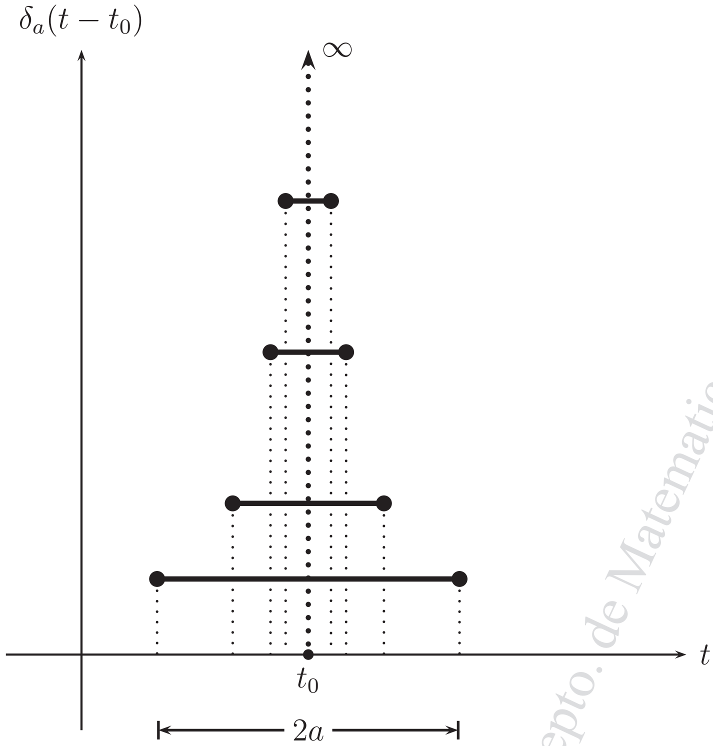

Figura 6.11

Propiedades:

1. $\delta(t-t_0)$ es infinita en $t=t_0$ y cero para $t\neq t_0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$

3. $\pounds\{\delta_a(t-t_0)\}(s)=e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2as}\right)$

4. $\pounds\{\delta(t-t_0)\}(s)\overset{\text{def.}}{=}\lim\limits_{a\to 0}\pounds\{\delta_a(t-t_0)\}(s)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}e^{-st_0}$

5. si $t_0=0\Rightarrow\pounds\{\delta(t)\}(s)=1$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$, en particular $\int_0^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$

7. Por 6. podemos decir que $\pounds\{f(t)\delta(t-t_0)\}(s) = e^{-t_0 s} f(t_0)$

Notar que en la propiedad 5. $\lim_{s\to\infty} \pounds\{f(t)\}(s) = 1$, mientras que por teorema anterior vimos que cuando una función es de orden exponencial $\lim_{s\to\infty} \pounds\{f(t)\}(s) = 0$, lo cual es una contradicción, esto nos indica que la "función"δ-Dirac no es de orden exponencial, es por esto que δ es una "función"extraña. Más precisamente, esta función es tratada con detenimiento en los textos de Teoría de Distribuciones (Ver texto de Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais de Djairo Guedes de Figueiredo)

Ejercicio 1. $y'' + y = \delta(t-2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi)$)

Ejercicio 2. $y'' + 2y' + 2y = \cos t\; \delta(t-3\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
(**Rta:** $y(t) = e^{-t}\cos t - e^{-(t-3\pi)} \operatorname{sen}(t-3\pi)\mathcal{U}(t-3\pi)$)

Ejercicio 3. $y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = [1 + \mathcal{U}(t-\pi)] \operatorname{sen} t$)

Ejercicio 4. $y'' + 2y' = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]\mathcal{U}(t-1)$)

Ejercicio 5. $y'' + 4y' + 5y = \delta(t-2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(**Rta:**$y = e^{-2(t-2\pi)} \operatorname{sen} t\, \mathcal{U}(t-2\pi)$)

Ejercicio 6. $y'' + y = e^t\delta(t-2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(**Rta:** $y = e^{2\pi} \operatorname{sen}(t-2\pi)\, \mathcal{U}(t-2\pi)$)

Ejercicio 7. $y'' - 2y' = 1 + \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\mathcal{U}(t-2) + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}\mathcal{U}(t-2)$)

6.6. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 19. Utilizando el Paquete Maple, descomponer en fracciones parciales las siguientes expresiones: a) $F(s) = \frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(a-1)}$, b) $F(s) =$

$\frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}$, c) $F(s) = \frac{s^2-16}{s^3(s+2)^2}$, d) $F(s) = \frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s^2+2s+2)}$, e) $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$

a).
```
>F1(s) := (7*s-1)/((s-3)*(s+2)*(s-1));
>convert(F1(s),parfrac,s);
```

$$F1(s) := \frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(a-1)}$$

$$\frac{2}{s-3} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

b).
```
>F2(s) :=(2*s+4)/((s-2)*(s^2+4*s+3));
>convert(F2(s),parfrac,s);
```

$$F2(s) := \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}$$

$$\frac{8}{15(s-2)} - \frac{1}{5(s+3)} - \frac{1}{3(s+1)}$$

c).
```
>F2(s) := (2*s+4)/((s-2)*(s^2+4*s+3));
>convert(F2(s),parfrac,s);
```

$$F3(s) := \frac{s^2-16}{s^3(s+2)^2}$$

$$-\frac{11}{4s} + \frac{11}{4(s+2)} - \frac{4}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{3}{2(s+2)^2}$$

d).
```
>F4(s) := (s^3+3*s^2+1)/(s^2*(s^2+2*s+2));
>convert(F4(s),parfrac,s,complex);
```

$$F4(s) := \frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s^2+2s+2)}$$

$$-\frac{0{,}5000000000}{s} + \frac{0{,}7500000000 + 1{,}000000000I}{s + 1{,}000000000 + 1{,}000000000I} + \\ + \frac{0{,}7500000000 - 1{,}000000000I}{s + 1. - 1.I} + \frac{0{,}5000000000}{s^2}$$

```
>convert(%,fraction);
```

$$-\frac{1}{(2s)}+\frac{(\frac{3}{4}+I)}{(s+1+I)}+\frac{(\frac{3}{4}-I)}{(s+1-I)}+\frac{1}{(2s^2)}$$

e). `>F5(s) := (s^2)/((s^2+1)^2);`
`>convert(F5(s),parfrac,s,complex);`

$$F5(s):=\frac{s^2}{(s^2+1)^2}$$

$$\frac{0{,}2500000000}{(s+1{,}000000000I)^2}+\frac{0{,}2500000000}{(s-1.I)^2}-\frac{0{,}2500000000I}{s-1.I}+\frac{0{,}2500000000I}{s+1{,}000000000I}$$

`>convert(%,fraction);`

$$\frac{1}{4(s+I)^2}+\frac{1}{4(s-I)^2}-\frac{\frac{1}{4}I}{s-I}+\frac{\frac{1}{4}I}{s+I}$$

Ejemplo 20. Hallar la transformada de Laplace de las funciones: $\operatorname{sen}(kt)$, $\cos(kt)$, e^{kt}

Efectuar las siguientes instrucciones:

```
>with(inttrans):laplace(cos(k*t),t,s);
```

$$\frac{s}{s^2+k^2}$$

```
>with(inttrans):laplace({sin(k*t),exp(k*t)},t,s);
```

$$\frac{1}{s-k},\ \frac{k}{s^2+k^2}$$

Ejemplo 21. Hallar la transformada de $e^t\operatorname{sen}(2t)$ y calcular la transformada inversa de $\frac{2}{(s-1)^2+4}$

Efectuar las siguientes instrucciones:

```
>with(inttrans):laplace(exp(t)*sin(2*t),t,s);
```

$$\frac{2}{(s-1)^2+4}$$

```
>invlaplace(%,s,t);
```

$$e^t \operatorname{sen}(2t)$$

Ejemplo 22. Resolver, usando transformada de Laplace, la E.D.

$$x'' + 16x = \cos 4t$$

con $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

Efectúe las siguientes instrucciones:

```
>with(ODEtools):Eqn2:=D(D(x))(t)+16*x(t)=cos(4*t):
dsolve({Eqn2,x(0)=0,D(x)(0)=1},x(t),method=laplace);
```

$$x(t) = \left(\frac{t}{8} + \frac{1}{4}\right) \operatorname{sen}(4t)$$

Ejemplo 23. Resolver, usando transformada de Laplace, la ecuación integro-diferencial $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(\tau)\ d\tau$ con la condición $y(0) = 0$

Efectuar los siguientes instrucciones:

```
>with(ODEtools):Eqn2:=D(y)(t)=1-sin(t)-int(y(s),s=0..t):
dsolve({Eqn2,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(t),method=laplace);
```

$$y(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right) \operatorname{sen}(t)$$

Ejemplo 24. Resolver, usando transformada de Laplace, la E.D. $y' + y = U(t-1)$ con la condición $y(0) = 0$ (U es la función escalón unitario)

Efectuar los siguientes pasos:

```
>restart: with(ODEtools): ode := diff(y(t),t) + y(t) =
5*piecewise(t<1,0,t>=1,1):dsolve({ode,y(0)=0},y(t),method=laplace);
```

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \text{undefind} & t = 1 \\ -5e^{(1-t)} + 5 & t > 1 \end{cases}$$