

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## SOLUCIONES POR SERIES

### 5.1. INTRODUCCION

- Una serie de potencias en  $(x - a)$ , es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^n.$$

- Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia que consiste de todos los puntos para los cuales la serie es convergente, por ésto, decimos que una serie de potencias define una función cuyo dominio es, precisamente, el intervalo de convergencia.
- Una serie de potencias converge absolutamente en un número  $x$ , si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| |x - a|^n$$

es convergente .

- Todo intervalo de convergencia tiene un radio de convergencia  $R$ .
- Una serie de potencias converge absolutamente para  $|x - a| < R$  y diverge para  $|x - a| > R$ . Cuando  $R = 0$ , la serie sólo converge en  $x = a$ . Cuando  $R = \infty$ , la serie converge para todo  $x$ .

- El radio de convergencia se obtiene mediante el criterio de la razón, en efecto, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}(x-a)^{n+1}}{C_n(x-a)^n} \right| = |x-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = L|x-a| < 1$$

donde  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right|$  y como la serie es convergente cuando  $|x-a| < R$ , entonces el radio de convergencia es  $R = \frac{1}{L}$ .

- Si  $R \neq 0$  ó  $R \neq \infty$ , el intervalo de convergencia puede o no incluir los extremos  $a - R$ ,  $a + R$  de dicho intervalo.
- Una serie de potencias representa una función continua en el interior de su intervalo de convergencia.
- Una serie de potencias puede ser derivada término a término en el interior de su intervalo de convergencia.
- Una serie de potencias puede ser integrada término a término en el interior de su intervalo de convergencia.
- Dos series de potencias pueden ser sumadas término a término si tienen un intervalo común de convergencia.

### SERIES MACLAURIN DE ALGUNAS FUNCIONES

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$   
convergente para todo  $x$  real ( o sea para  $-\infty < x < \infty$ )
- $\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$   
convergente para todo  $x$  real.
- $\text{cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$   
convergente para todo  $x$  en los reales.
- $\text{senh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$   
convergente para todo  $x$  real.

$$5. \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

convergente para todo  $x$  en los reales.

$$6. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

convergente para  $x$  en el intervalo  $-1 < x < 1$

$$7. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

convergente para  $x$  en el intervalo  $-1 < x \leq 1$

$$8. \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

convergente para  $x$  en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$

$$9. \sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

convergente para todo  $x$  en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$

10. Serie binomial:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \frac{r(r-1)(r-2)x^3}{3!} + \dots$$

convergente para  $x$  en el intervalo  $-1 < x < 1$

## 5.2. SOLUCION EN PUNTOS ORDINARIOS

Supongamos que la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

se puede escribir así:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

donde  $a_2(x) \neq 0$  en  $I$  y  $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$  y  $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$

**Definición 5.1 (Punto Ordinario).** Se dice que  $x = a$  es un punto ordinario de la E.D.  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ , si  $P(x)$  y  $Q(x)$  son analíticas en  $x = a$ , es decir, si  $P(x)$  y  $Q(x)$  se pueden expandir en serie de potencias de  $x - a$  con un radio de convergencia positivo.

**Nota:** si un punto no es ordinario se dice que es singular.

**RECORDEMOS:** serie Taylor de  $y(x)$  en  $x = a$  es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n,$$

luego, toda función que tenga un desarrollo en serie Taylor alrededor de  $x = a$  es analítica en  $x = a$ .

En particular cuando  $x = 0$  a la serie Taylor se le llama serie Maclaurin de  $y(x)$  y la serie tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} (x)^n,$$

luego, toda función que tenga un desarrollo en serie Maclaurin es analítica en  $x = 0$ .

**Ejemplo 1.** Hallar los puntos ordinarios y singulares de  $y'' + \operatorname{sen} xy' + e^x y = 0$

Solución:  $\operatorname{sen} x$ : tiene expansión Taylor para cualquier  $a$   
 $e^x$ : tiene expansión Taylor para cualquier  $a$ .

Es decir todo  $a$  en  $\mathbf{R}$  es punto ordinario de la ecuación diferencial, por tanto no tiene puntos singulares.

**Ejemplo 2.** Hallar los puntos ordinarios y singulares de  $xy'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$

Solución:

$$y'' + \frac{\overbrace{\operatorname{sen} x}^{Q(x)}}{x} y = 0$$

$$Q(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$\Rightarrow x = 0$  es punto ordinario de la E.D., por tanto todos los  $x \neq 0$  son puntos singulares.

**Ejemplo 3.** Hallar los puntos ordinarios y singulares de  $y'' + (\ln x)y = 0$

Solución:  $x = 0$  es un punto singular ya que  $\ln x$  no tiene expansión en  $x = 0$ , todos los demás puntos diferentes de cero son puntos ordinarios.

Analicemos el caso en que  $a_2(x)$ ,  $a_1(x)$  y  $a_0(x)$  son polinomios. Si en la E.D.  $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$  se tiene que  $a_2(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_0(x)$  son polinomios sin factores comunes, o sea, sin raíces comunes, entonces  $x = a$  es :

i) Un punto ordinario si  $a_2(a) \neq 0$  es decir,  $x = a$  no es raíz del polinomio  $a_2(x)$ .

ii) Un punto singular si  $a_2(a) = 0$ , es decir, si  $a$  es raíz de  $a_2(x)$ .

**Ejemplo 4.** Hallar los puntos ordinarios y singulares de  $(x^2 - 4)y'' + 2xy' + 3y = 0$

Solución:

$a_2(x) = x^2 - 4 = 0$ , luego  $x = \pm 2$  son puntos singulares y  $x \neq \pm 2$  son puntos ordinarios.

**Teorema 5.1.**

Si  $x = a$  es un punto ordinario de la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

siempre podemos encontrar dos soluciones distintas (linealmente independientes), en serie de potencias; soluciones que son de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^n.$$

Una solución en serie de potencias converge por lo menos para  $|x - a| < R_1$ , donde  $R_1$  es la distancia de  $a$  al punto singular más cercano.

**Nota:** para simplificar supondremos que el punto ordinario es  $a = 0$ , si  $a \neq 0$ , se hace la sustitución  $t = x - a$ . Esta sustitución convierte la E.D. en otra E.D. con punto ordinario  $t = 0$ .

**Ejemplo 5.** Resolver por series la E.D.  $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$   
Solución:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$  son puntos singulares y los  $x \neq \pm 1$  son puntos ordinarios.

Trabajemos con el punto ordinario  $x = 0$ , los candidatos a solución son de la forma  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

Debemos hallar las  $C_n$ : derivamos dos veces:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$$

Pasamos a sustituir  $y'(x)$  y  $y''(x)$  en la E.D. original:

$$x^2 y'' - y'' + 4xy' + 2y = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4n C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 C_n x^n = 0$$

Homogenizamos las potencias de  $x$ :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^n - \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) C_{m+2} x^m + \sum_{n=1}^{\infty} 4n C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 C_n x^n = 0$$

$$\text{haciendo } \begin{cases} n-2 = m & \Rightarrow n = m+2 \\ n = 2 & \Rightarrow m = 0 \end{cases}$$

Escribimos todo en términos de  $k$ :

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) C_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) C_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 4k C_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2 C_k x^k = 0$$

Ahora homogenizamos el índice de las series:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^k - 2C_2 - (3)(2)C_3 x - \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k + 4C_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} 4k C_k x^k + 2C_0 + 2C_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} 2 C_k x^k = 0$$

luego

$$2C_0 - 2C_2 + (6C_1 - 2 \cdot 3C_3)x + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} + 4kC_k + 2C_k]x^k = 0$$

Comparando coeficientes:

$$x^0 : 2C_0 - 2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = C_0$$

$$x^1 : 6C_1 - 6C_3 = 0 \Rightarrow C_1 = C_3$$

$$x^k : [k(k-1) + 4k + 2]C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} = 0 \quad k = 2, 3, \dots$$

$$(k^2 + 3k + 2)C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} = 0$$

$$(k+2)(k+1)C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} = 0$$

$$C_{k+2} = \frac{(k+2)(k+1)}{(k+2)(k+1)} C_k$$

$$\underbrace{C_{k+2}} = C_k \quad k = 2, 3, \dots$$

Fórmula de recurrencia para los coeficientes

Iteremos la fórmula de recurrencia:

$$k = 2 : C_4 = C_2 = C_0$$

$$k = 3 : C_5 = C_3 = C_1$$

$$k = 4 : C_6 = C_4 = C_0$$

$$k = 5 : C_7 = C_5 = C_1$$

Volviendo a

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + \dots \\ &= C_0 + C_1 x + C_0 x^2 + C_1 x^3 + C_0 x^4 + C_1 x^5 + C_0 x^6 + \dots \end{aligned}$$

La solución general:

$$\begin{aligned} &= C_0 \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots)}_{y_1(x)} + C_1 \underbrace{(x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1} + \dots)}_{y_2(x)} \\ &= C_0 \frac{1}{1-x^2} + C_1 x (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots) \\ &= C_0 \frac{1}{1-x^2} + \frac{C_1 x}{1-x^2} \quad \text{ya que} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \end{aligned}$$

Siendo  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  dos soluciones linealmente independientes.

El siguiente ejercicio resuelto, sólo tiene validez para E.D. con condiciones iniciales. Si la condición inicial está en  $x = 0$ , utilizamos las series Maclaurin y si la condición inicial está en  $x = a$ , utilizamos la serie Taylor.

**Ejemplo 6.**  $y'' - e^{-x}y = 0$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$

Solución.

Serie Maclaurin de  $y(x)$ .

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)x^n}{n!} \\ y(x) &= y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\ y(0) &= 1 \quad y'(0) = 1 \end{aligned}$$

De la ecuación tenemos que

$$y''(x) = e^{-x}y(x), \quad \text{evaluando en } x = 0 \Rightarrow y''(0) = 1 \times 1 = 1$$

Derivando nuevamente tenemos que:

$$y'''(x) = e^{-x}y'(x) - e^{-x}y(x)$$

evaluando en

$$x = 0 \Rightarrow y'''(0) = 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$$

$$y^{(iv)}(x) = e^{-x}(y''(x) - y'(x)) - e^{-x}(y'(x) - y(x))$$

$$\stackrel{x=0}{\Rightarrow} y^{(iv)}(0) = 1(1 - 1) - 1(1 - 1) = 0$$

$$y^{(v)}(x) = e^{-x}(y'''(x) - 2y''(x) + y'(x)) - e^{-x}(y''(x) - 2y' + y(x))$$

$$y^{(v)}(0) = 1(0 - 2(1) + 1) - 1(1 - 2(1) + 1) = -1$$

Sustituyendo en la fórmula de Maclaurin:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Resolver por series los siguientes ejercicios en el punto ordinario  $x = 0$ :

**Ejercicio 1.**  $y'' - 2xy' + 8y = 0 \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$

(Rta:  $y = 3 - 12x^2 + 4x^4$ )

**Ejercicio 2.**  $(x^2 - 1)y'' - 6y = 0$

(Rta:  $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(2n-1)(2n-3)} x^{2n} + C_1(x - x^3)$ )

**Ejercicio 3.**  $y'' - xy = 0$

(Rta:  $y = C_0(1 + \frac{1}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{1}{6 \cdot 5} \frac{1}{3 \cdot 2} x^6 + \frac{1}{9 \cdot 8} \frac{1}{6 \cdot 5} \frac{1}{3 \cdot 2} x^9 + \dots) + C_1(x + \frac{1}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{1}{7 \cdot 6} \frac{1}{4 \cdot 3} x^7 + \frac{1}{10 \cdot 9} \frac{1}{7 \cdot 6} \frac{1}{4 \cdot 3} x^{10} + \dots)$ )

**Ejercicio 4.**  $(x^2 + 1)y'' + 6xy' + 6y = 0$

(Rta:  $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n + 1) x^{2n} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1) x^{2n+1}$ )

**Ejercicio 5.**  $y'' - xy' - y = 0$

(Rta:  $y = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2n} x^{2n} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} x^{2n+1}$ )

**Ejercicio 6.**  $y'' + e^{-x}y = 0$

(Sugerencia: Hallar la serie  $e^{-x}$  y multiplicarla por la serie de  $y$ )

(Rta:  $y = C_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{40} + \frac{11x^6}{6!} \dots) + C_1(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^6}{360} \dots)$ )

**Ejercicio 7.**  $(x - 1)y'' + y' = 0$

(Rta:  $y_1 = C_0, \quad y_2 = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = C_1 \ln|x - 1|$ )

**Ejercicio 8.**  $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$

(Rta:  $y(x) = C_0(1 + x \tan^{-1} x) + C_1x$ )

**Ejercicio 9.**  $y'' - xy' + y = -x \cos x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$

(Rta:  $y(x) = x + \sin x$ )

**Ejercicio 10.**  $y'' - 2xy' + 4y = 0$  con  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = 0$

(Rta:  $y = 1 - 2x^2$ )

**Ejercicio 11.**  $(1 - x)^2y'' - (1 - x)y' - y = 0$  con  $y(0) = y'(0) = 1$

(Rta:  $y = \frac{1}{1-x}$ )

**Ejercicio 12.**  $y'' - 2xy' - 2y = x$  con  $y(0) = 1$  y  $y'(0) = -\frac{1}{4}$

(Rta:  $y = e^{x^2} - \frac{x}{4}$ )

**Ejercicio 13.**  $y'' + xy' + (2x - 1)y = x$  con  $y(0) = 2$  y  $y'(0) = 3$ . Hallar los primeros 6 términos de la solución particular.

(Rta:  $y = 2 + 3x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4 - \frac{11}{120}x^5 - \dots$ )

**Ejercicio 14.** Hallar la solución particular de la E.D. de Ayry, alrededor del punto ordinario  $x = 1$

$$y'' - xy = 0 \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$$

(Rta.:  $y = 1 + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{4(x-1)^5}{5!} + \dots$ )

**Ejercicio 15.** Hallar la solución particular de la E.D.

$$y'' - 2xy - 2y = x \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{4}$$

(Rta.:  $y = -\frac{x}{4} + e^{x^2}$ )

**Ejercicio 16.** Resolviendo por series, mostrar que la solución de la E.D.

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$$

es  $y = 8x - 2e^x$ .

**Ejercicio 17.**  $y'' + xy' + y = 0$

- a). Hallar dos soluciones linealmente independientes  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$
- b). Usando el criterio del cociente, mostrar que las dos series son convergentes para todo  $x$ .
- c). Probar que  $y_1(x) = e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$
- d). Usando el método de reducción de orden de D'Alembert, hallar  $y_2(x)$
- (Rta: a).  $y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$ ,  $y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} - \frac{x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$ )

**Ejercicio 18.** La E.D. de Legendre de orden  $\alpha$  es:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \text{ con } \alpha > -1$$

Mostrar:

- a) Que las fórmulas de recurrencia son:

$$C_{2m} = \frac{(-1)^m \alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4) \dots (\alpha - 2m + 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3) \dots (\alpha + 2m - 1)}{(2m)!} C_0$$

$$C_{2m+1} = \frac{(-1)^m (\alpha - 1)(\alpha - 3) \dots (\alpha - 2m + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 4) \dots (\alpha + 2m)}{(2m + 1)!} C_1$$

- b) Las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = C_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m} x^{2m}$$

$$y_2 = C_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m+1} x^{2m+1}$$

donde  $a_{2m}$  y  $a_{2m+1}$  son las fracciones encontradas en a), pero sin  $(-1)^m$

- c) Si  $\alpha$  es entero no negativo y par, entonces  $a_{2m} = 0$  para  $2m > n$ ; mostrar que  $y_1$  es un polinomio de grado  $n$  y  $y_2$  es una serie infinita. Si  $\alpha$  es entero no negativo e impar; mostrar que  $a_{2m+1} = 0$  para  $2m + 1 > n$  y  $y_2$  es un polinomio de grado  $n$  y  $y_1$  es una serie infinita.

- d) Se acostumbra tomar la constante arbitraria ( $C_0$  o  $C_1$  según el caso) de tal manera que el coeficiente de  $x^n$  en el polinomio  $y_1$  o  $y_2$  (según el caso) sea  $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$  y se les llama polinomios de Legendre  $P_n(x)$ . Mostrar que:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

donde  $N = \text{parte entera de } \frac{n}{2}$

- e) Mostrar que los 6 primeros polinomios de Legendre son:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

**Ejercicio 19.** Fórmula de Rodriguez:

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

para el polinomio de Legendre de grado  $n$ .

- a) Mostrar que  $u = (x^2 - 1)^n$  satisface la E.D.

$$(1 - x^2)u' + 2nxu = 0$$

Derive ambos lados de la E.D. y obtenga

$$(1 - x^2) + 2(n-1)xu' + 2nu = 0$$

- b) Derive sucesivamente,  $n$  veces ambos lados de la ecuación y obtenga:

$$(1 - x^2)u^{(n+2)} - 2xu^{(n+1)} + n(n+1)u^{(n)} = 0$$

Hacer  $v = u^{(n)}$  y mostrar que  $v = D^n(1 - x^2)^n$  y luego mostrar que  $v$  satisface la ecuación de Legendre de orden  $n$

- c) Demostrar que el coeficiente de  $x^n$  en  $v$  es  $\frac{(2n)!}{n!}$

- d) Explicar porqué c) demuestra la fórmula de Rodriguez (Notar que el coeficiente de  $x^n$  en  $P_n(x)$  es  $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ )

**Ejercicio 20.** La E.D.

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

se le llama ecuación de Hermite de orden  $\alpha$ .

- a) Mostrar que las dos soluciones en serie de potencias son:

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^m \alpha (\alpha - 2) \dots (\alpha - 2m + 2)}{(2m)!} x^{2m}$$

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^m (\alpha - 1) (\alpha - 3) \dots (\alpha - 2m + 1)}{(2m + 1)!} x^{2m+1}$$

- b) Si  $\alpha$  es entero par, mostrar que  $y_1$  es un polinomio.  
Si  $\alpha$  es impar, mostrar que  $y_2$  es un polinomio.
- c) El polinomio de la parte b) se denota por  $H_n(x)$  y se le llama polinomio de Hermite cuando el coeficiente de  $x^n$  es  $2^n$ .
- d) Demostrar que los 6 primeros polinomios de Hermite son:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned}$$

- e) La formula general de los polinomios de Hermite es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Por inducción mostrar que genera un polinomio de grado  $n$ .

### 5.3. SOLUCIONES EN TORNO A PUNTOS SINGULARES REGULARES

**Definición 5.2 (Punto singular).**

i. Decimos que  $x = x_0$  es un punto singular regular de la E.D.O.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

si  $(x - x_0)P(x)$  y  $(x - x_0)^2Q(x)$  son analíticas en  $x = x_0$ , es decir, si  $(x - x_0)P(x)$  y  $(x - x_0)^2Q(x)$  tienen desarrollos en series de potencias de  $(x - x_0)$ . Si  $x = x_0$  no cumple con la anterior definición, entonces decimos que  $x = x_0$  es un punto **singular irregular**.

ii. Si en la E.D.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

se tiene que  $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$  son polinomios sin factores comunes, entonces decimos que  $x = x_0$  es un punto **singular regular** si  $a_2(x_0) = 0$  y además, si en  $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$  y  $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ , el factor  $x - x_0$  tiene a lo sumo grado uno en el denominador de  $P(x)$  y grado a lo sumo dos en el denominador de  $Q(x)$ .

**Ejemplo 7.** Hallar los puntos singulares regulares e irregulares de

$$(x^2 - 4)^2y'' + (x - 2)y' + y = 0$$

Solución:

Puntos singulares:

$$a_2(x) = (x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$P(x) = \frac{x - 2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{1}{(x - 2)(x + 2)^2}$$

$$Q(x) = \frac{1}{(x - 2)^2(x + 2)^2}$$

- Con  $x = +2$ , como  $(x - 2)$  es un factor de grado uno en  $P(x)$  y de grado dos en  $Q(x)$ , por lo tanto  $x = 2$  es punto singular regular.
- Con  $x = -2$  es punto singular irregular, porque  $x + 2$  aparece con grado dos en el denominador de  $P(x)$ .

**Nota:** los puntos singulares pueden ser números complejos.

**Teorema 5.2 (de Frobenius).**

Si  $x = x_0$  es un punto singular regular de la E.D.O.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

entonces existe al menos una solución en serie de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^{n+r},$$

donde  $r$  es una constante a determinar.

Esta serie converge en un intervalo de la forma  $0 < x - x_0 < R$ .

**Ejemplo 8.** Utilizar el teorema de Frobenius para hallar dos soluciones linealmente independientes de la E.D.  $3xy'' + y' - y = 0$

Solución:

$x = 0$  es punto singular y es regular porque

$$P(x) = \frac{1}{3x}, \quad Q(x) = -\frac{1}{3x}$$

Suponemos una solución de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-2}$$

y sustituimos en la E.D.

$$3xy'' + y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2) C_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$x^r \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2)C_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right] = 0$$

Sacamos la potencia más baja:

$$x^r \left[ r(3r-2)C_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2)C_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right] = 0$$

$$\text{hagamos } \begin{cases} k = n-1 & \Rightarrow n = k+1 \\ n = 1 & \Rightarrow k = 0 \end{cases}$$

$$x^r \left[ r(3r-2)C_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r+1)(3k+3r+1)C_{k+1} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \right] = 0$$

$$x^r \left[ r(3r-2)C_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+1)(3k+3r+1)C_{k+1} - C_k] x^k \right] = 0$$

en potencias de:

$$x^{-1} : r(3r-2)C_0 = 0$$

y en potencias de:

$$x^k : (k+r+1)(3k+3r+1)C_{k+1} - C_k = 0 \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{si } C_0 \neq 0 \Rightarrow \underbrace{r(3r-2) = 0}_{\text{ec. indicial}} \Rightarrow \underbrace{r_2 = 0 \quad r_1 = \frac{2}{3}}_{\text{índices (o exponentes) de la singularidad}} \quad \text{y}$$

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Con  $r_1 = \frac{2}{3}$  que es la raíz mayor, entonces:

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(k + \frac{5}{3})(3k+3)} = \frac{C_k}{(3k+5)(k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.1)$$

Con  $r_2 = 0$  entonces:

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(k+1)(3k+1)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.2)$$

Iteremos (5.1):

$$k = 0 : C_1 = \frac{C_0}{5 \times 1}$$

$$k = 1 : C_2 = \frac{C_1}{8 \times 2} = \frac{C_0}{(5 \times 1) \times (8 \times 2)} = \frac{C_0}{2! \times (5 \times 8)}$$

$$k = 2 : C_3 = \frac{C_2}{11 \times 3} = \frac{C_0}{(5 \times 1) \times (8 \times 2) \times (11 \times 3)} = \frac{C_0}{3! \times 5 \times 8 \times 11}$$

$$k = 3 : C_4 = \frac{C_3}{14 \times 4} = \frac{C_0}{4! \times 5 \times 8 \times 11 \times 14}$$

generalizando

$$C_n = \frac{C_0}{n! \times 5 \times 8 \times 11 \times 14 \dots (3n + 2)} \quad n = 1, 2, \dots$$

Iteremos (5.2):

$$k = 0 : C_1 = \frac{C_0}{1 \times 1}$$

$$k = 1 : C_2 = \frac{C_1}{2 \times 4} = \frac{C_0}{(1 \times 1) \times (2 \times 4)}$$

$$k = 2 : C_3 = \frac{C_2}{3 \times 7} = \frac{C_0}{(1 \times 1) \times (2 \times 4) \times (3 \times 7)} = \frac{C_0}{3! \times 4 \times 7}$$

$$k = 3 : C_4 = \frac{C_3}{4 \times 10} = \frac{C_0}{4! \times 4 \times 7 \times 10}$$

generalizando

$$C_n = \frac{C_0}{n! \times 1 \times 4 \times 7 \times 10 \dots (3n - 2)} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x^{\frac{2}{3}} \left[ C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \right] \\ &= x^{\frac{2}{3}} \left[ C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_0}{n! \times 5 \times 8 \times 11 \times 14 \dots (3n + 2)} x^n \right] \\ &= C_0 x^{\frac{2}{3}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \times 5 \times 8 \times 11 \times 14 \dots (3n + 2)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_2 = 0 \Rightarrow y_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+0} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \\
 &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_0}{n! \times 1 \times 4 \times 7 \times 10 \dots (3n-2)} x^n \\
 &= C_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \times 1 \times 4 \times 7 \times 10 \dots (3n-2)} \right]
 \end{aligned}$$

Luego la solución general es :

$$\begin{aligned}
 y &= k_1 y_1 + k_2 y_2 \\
 &= k_1 C_0 x^{\frac{2}{3}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \times 5 \times 8 \times 11 \times 14 \dots (3n+2)} \right] + \\
 & k_2 C_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \times 1 \times 4 \times 7 \times 10 \dots (3n-2)} \right]
 \end{aligned}$$

observemos que para este ejemplo

$$r_1 = \frac{2}{3}, \quad r_2 = 0 \Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{2}{3} \neq \text{entero}$$

**Nota:** en general si  $x = 0$  es un punto singular regular, entonces las funciones  $xP(x)$  y  $x^2Q(x)$  son analíticas en  $x = 0$ , es decir

$$xP(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots$$

$$x^2Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots$$

son convergentes en intervalos de radio positivo. Después de sustituir  $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$  en la E.D. y simplificar, la ecuación indicial es una ecuación cuadrática en  $r$  que resulta de igualar a cero el coeficiente de la menor potencia de  $x$ . Siguiendo este procedimiento se puede mostrar que la ecuación indicial es

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$$

Se hallan las raíces de la ecuación indicial y se sustituyen en la relación de recurrencia.

Con las raíces de la ecuación indicial pueden ocurrir los siguientes tres casos.

**CASO I:** cuando  $r_1 - r_2 \neq$  entero positivo ( $r_1 > r_2$ ), entonces las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_2}$$

Este caso lo hemos contemplado en el Ejemplo 8.

**CASO II:** cuando  $r_1 - r_2 =$  entero positivo ( $r_1 > r_2$ ), entonces las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1}$$

$$y_2 = C y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \quad b_0 \neq 0,$$

donde  $C$  es una constante que puede ser cero.

**Nota:** para saber si  $C$  es cero o diferente de cero, utilizamos la fórmula de D'Alembert; si es cero, entonces en  $y_2$  no aparece el término logarítmico. El próximo ejemplo lo haremos con  $C = 0$ ; si  $C \neq 0$ ,  $y_2$  también se puede hallar utilizando la fórmula de D'Alembert:

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{[y_1(x)]^2} dx$$

o también derivando dos veces

$$y_2 = C y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \quad b_0 \neq 0,$$

y sustituyendo en la E.D. e iterando la fórmula de recurrencia para hallar los coeficientes  $b_n$ .

**CASO III:** cuando  $r_1 - r_2 = 0$ , entonces las soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1} \quad \text{con } C_0 \neq 0$$

$$y_2 = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_1} \quad \text{sabiendo que } r_1 = r_2$$

### 5.3.1. CASO II: $r_1 - r_2 =$ entero positivo

Con el siguiente ejemplo mostramos el CASO II, o sea cuando  $r_1 - r_2 =$  entero positivo.

**Ejemplo 9.**  $xy'' + (5 + 3x)y' + 3y = 0$

Solución:

$x = 0$  es punto singular regular, ya que

$$P(x) = \frac{5 + 3x}{x} \quad Q(x) = \frac{3}{x}$$

Si utilizamos la fórmula de D'Alembert encontramos que después de efectuar todas las operaciones, el primer término no tiene logaritmo, por tanto  $C = 0$ . Ahora supongamos que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-2}$$

sustituyendo en la E.D.

$$xy'' + 5y' + 3xy' + 3y = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 5(n+r) C_n x^{n+r-1} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)C_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n x^{n+r} = 0$$

$$x^r \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1+5)C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r+1)C_n x^n \right] = 0$$

$$x^r \left[ r(r+4)C_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r+4)C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r+1)C_n x^n \right] = 0$$

$$\text{hagamos } \begin{cases} k = n - 1 & \Rightarrow n = k + 1 \\ \text{cuando } n = 1 & \Rightarrow k = 0 \end{cases}$$

luego

$$x^r \left[ r(r+4)C_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+1)(k+r+5)C_{k+1} + 3(k+r+1)C_k] x^k \right] = 0$$

Por lo tanto la ecuación indicial:

$$r(r+4) = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \quad r_2 = -4 \quad \text{o sea que } r_1 - r_2 = \text{entero positivo}$$

y la fórmula de recurrencia es

$$(k+r+1)(k+r+5)C_{k+1} + 3(k+r+1)C_k = 0 \quad k = 0, 1, \dots$$

e iteramos con la menor raíz indicial  $r_2 = -4$ :

$$(k+1)(k-3)C_{k+1} + 3(k-3)C_k = 0 \quad k = 0, 1, \dots$$

$$k = 0 : 1(-3)C_1 + 3(-3)C_0 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{9C_0}{-3} = -3C_0$$

$$k = 1 : 2(-2)C_2 + 3(-2)C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{6C_1}{-4} = -\frac{3}{2}(-3)C_0 = \frac{9}{2}C_0$$

$$k = 2 : 3(-1)C_3 + 3(-1)C_2 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{3C_2}{-3} = -\frac{9}{2}C_0$$

$$k = 3 : 4(0)C_4 + 3(0)C_3 = 0 \Rightarrow$$

$C_4$  es parámetro

$$k \geq 4 : C_{k+1} = -\frac{3}{(k+1)}C_k$$

es decir

$$C_1 = -3C_0, \quad C_2 = \frac{9}{2}C_0, \quad C_3 = -\frac{9}{2}C_0,$$

$C_4$  : parámetro

$$k \geq 4: C_{k+1} = -\frac{3}{(k+1)} C_k \quad (5.3)$$

iteremos (5.3):

$$\begin{aligned} k = 4: C_5 &= -\frac{3}{5} C_4 \\ k = 5: C_6 &= -\frac{3}{6} C_5 = \frac{3 \times 3}{5 \times 6} C_4 \\ k = 6: C_7 &= -\frac{3}{7} C_6 = -\frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 6 \times 7} C_4 \\ &= -\frac{3^3 4!}{7!} C_4 \end{aligned}$$

generalizando

$$C_n = (-1)^n \frac{3^{(n-4)} 4!}{n!} C_4 \quad n \geq 4$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n-4} \\ &= x^{-4} [C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} C_n x^n] \\ &= x^{-4} [C_0 - 3C_0 x + \frac{9}{2} C_0 x^2 - \frac{9}{2} C_0 x^3 + C_4 x^4 + \\ &\quad + \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{(n-4)} 4!}{n!} C_4 x^n] \\ &= \underbrace{C_0 x^{-4} \left( 1 - 3x + \frac{9}{2} x^2 - \frac{9}{2} x^3 \right)}_{y_1(x)} \\ &\quad + \underbrace{C_4 \left( 1 + \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{(n-4)} 4!}{(n)!} x^{n-4} \right)}_{y_2(x)} \end{aligned}$$

hagamos  $\begin{cases} k = n - 4 \Rightarrow n = k + 4 \\ n = 5 \Rightarrow k = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} y &= C_0 y_1(x) + C_4 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+4} \frac{3^k 4!}{(k+4)!} x^k \right) \\ &= C_0 y_1(x) + C_4 \underbrace{\left( 1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(n+4)!} x^n \right)}_{\text{converge } \forall x \in \mathbf{R}} \end{aligned}$$

Para abordar el caso iii) cuando  $r_1 = r_2$  necesitamos definir la función Gamma.

### 5.3.2. FUNCIÓN GAMMA: $\Gamma(x)$

**Definición 5.3.** Sea  $x > 0$ . La función Gamma se define así:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{x-1} d\tau$$

**Teorema 5.3 (Fórmula de recurrencia para la función  $\Gamma$ ).**

Para  $x > 0$  :  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$  .

**Demostración:**  $\Gamma(x + 1) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^x d\tau = -e^{-\tau} \tau^x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x e^{-\tau} \tau^{x-1} d\tau =$   
 la anterior integral se hizo por partes,

haciendo  $\begin{cases} u = \tau^x \Rightarrow du = x\tau^{x-1} d\tau \\ dv = e^{-\tau} d\tau \Rightarrow v = -e^{-\tau} \end{cases}$

$$= 0 - 0 + x \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{x-1} d\tau = x\Gamma(x)$$

ya que por el teorema de estricción y la regla de L'Hôpital

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau} \tau^x = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau^x}{e^{\tau}} = 0$$

**Observaciones:**

a).

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\Gamma(x)$	9.5	4.59	2.99	2.22	$\sqrt{\pi}$	1.49	1.30	1.16	1.07

b). Si  $x = n$  entero positivo:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2)\dots 1\Gamma(1)$$

$$\text{Pero } \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^0 d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^{\infty} = -(0-1) = 1$$

Luego,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

**Definición 5.4.** Si  $x < 0$ , definimos  $\Gamma(x)$  así:  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$  si  $x \neq 0$  o  $x \neq$  de un entero negativo.  $\Gamma(x) = \pm\infty$  si  $x = 0$  o  $x =$  entero negativo. (Ver la gráfica 5.1)

**NOTA:** la fórmula para calcular  $\Gamma(x)$  para  $x < 0$  es:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

En la figura 5.1 se muestra la gráfica de la función  $\Gamma(x)$ .

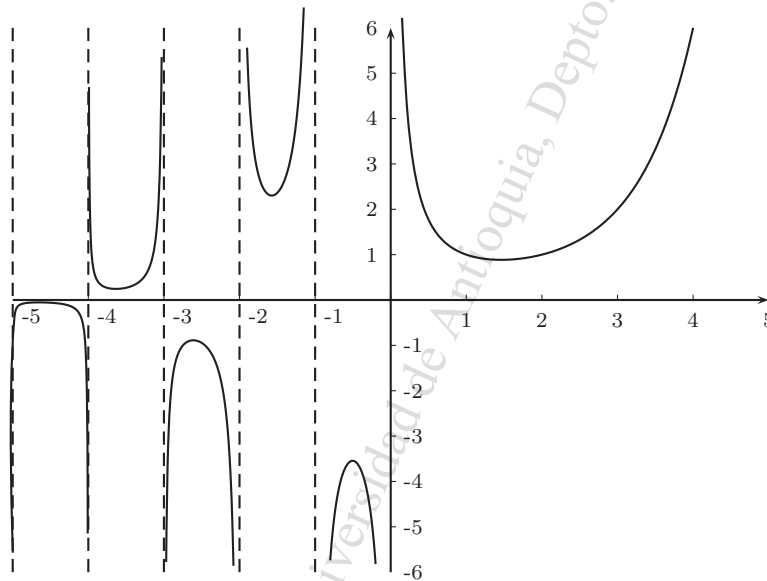


Figura 5.1

**Ejemplo 10.**  $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

**Ejemplo 11.**  $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) &= \left(-\frac{2}{7}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Como  $\Gamma(n+1) = n!$  para  $n$  entero positivo, generalizamos el factorial así:

**Definición 5.5 (Factorial generalizado).**  $x! = \Gamma(x+1)$ ,  $x \neq$  entero negativo.

**Nota:** con  $n = 0$  obtenemos  $0! = \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1$  y

$$1! = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 \times 1 = 1$$

con esto probamos, mediante la función Gamma, que  $0! = 1 = 1!$

**Ejemplo 12.** Hallar  $\left(\frac{7}{2}\right)!$

$$\left(\frac{7}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{7}{2} + 1\right) = \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

**Ejemplo 13.** Calcular  $\left(-\frac{7}{2}\right)!$

Solución:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{7}{2}\right)! &= \Gamma\left(-\frac{7}{2} + 1\right) = \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

**Ejercicio 1.** Hallar  $\int_0^1 x^3 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 dx$   
(Rta:  $\frac{3!}{4^4}$ )

**Ejercicio 2.** Hallar  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(Rta:  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ )

**Ejercicio 3.** Hallar utilizando la función  $\Gamma$ :  $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$

(Rta:  $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ )

**Ejercicio 4.** Probar que

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!} \sqrt{\pi}$$

y

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}$$

para todo entero  $n$  no negativo.

### 5.3.3. CASO III: $r_1 = r_2$

**CASO III:**  $r_1 = r_2$ . Tomamos como ejemplo para este caso, la E.D. de Bessel de orden cero.

**Definición 5.6 (Ecuación Diferencial de Bessel).** La E.D.:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$$

donde  $p$  es un parámetro positivo, se le llama E.D. de Bessel de orden  $p$ .

Las soluciones de esta E.D. se les llama funciones de Bessel de orden  $p$ . Cuando  $p = 0$  y  $x \neq 0$  entonces

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Hallemos explícitamente estas soluciones en el intervalo  $0 < x < R$ ; es fácil ver que  $x = 0$  es un punto singular regular.

Suponemos una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r},$$

con  $0 < x < R$  y  $C_0 \neq 0$ ; derivamos dos veces y sustituimos en la E.D. y llegamos a esto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

$$x^r \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} \right] = 0$$

para homogenizar los exponentes hagamos  $k = n - 1$  (o sea que  $n = k + 1$  y cuando  $n = 0$  entonces  $k = -1$ ) en la primera sumatoria y hagamos  $k = n + 1$  en la segunda sumatoria, luego

$$x^r \left[ \sum_{k=-1}^{\infty} (k+r+1)^2 C_{k+1} x^k + \sum_{n=1}^{\infty} C_{k-1} x^k \right] = 0$$

$$x^r \left[ r^2 C_0 x^{-1} + (r+1)^2 C_1 x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+r+1)^2 C_{k+1} + C_{k-1}] x^k \right] = 0$$

comparamos coeficientes

$$r^2 C_0 = 0, \quad (r+1)^2 C_1 = 0, \quad (k+r+1)^2 C_{k+1} + C_{k-1} = 0 \text{ con } k \geq 1$$

$$\text{Si } C_0 \neq 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r = 0$$

$$(0+1)^2 C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$C_{k+1} = -\frac{C_{k-1}}{(k+1)^2} \quad k = 1, 2, \dots$$

iterando  $k$

$$k = 1 \Rightarrow C_2 = -\frac{C_0}{(1+1)^2} = -\frac{C_0}{2^2}$$

$$k = 2 \Rightarrow C_3 = -\frac{C_1}{3^2} = 0$$

$$k = 3 \Rightarrow C_4 = -\frac{C_2}{4^2} = \frac{C_0}{2^2 \times 4^2}$$


---

$$k = 4 \Rightarrow C_5 = 0$$

$$k = 5 \Rightarrow C_6 = -\frac{C_4}{6^2} = -\frac{C_0}{2^2 \times 4^2 \times 6^2}$$

Generalizando,

$$\begin{aligned} C_{2n} &= (-1)^n \frac{C_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2} = (-1)^n \frac{C_0}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n))^2} \\ &= (-1)^n \frac{C_0}{(2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^2} \\ &= (-1)^n \frac{C_0}{2^{2n} (n!)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$C_{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sustituimos en

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_0}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} = C_0 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right] \end{aligned}$$

Por definición, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = J_0(x)$$

se le llama función de Bessel de orden cero y de primera especie

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots$$

La segunda solución la hallamos por el método de reducción de orden D'Alembert:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x) \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x} dx}}{[J_0(x)]^2} dx = J_0(x) \int \frac{1}{x[J_0(x)]^2} dx \\ \text{como } [J_0(x)]^2 &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{32} - \frac{5x^6}{576} + \dots \\ \Rightarrow \frac{1}{[J_0(x)]^2} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{32} + \frac{23x^6}{576} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{x[J_0(x)]^2} = \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \frac{23x^5}{576} + \dots \\ y_2(x) &= J_0(x) \int \left( \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \frac{23x^5}{576} + \dots \right) dx \\ &= J_0(x) \left[ \ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \dots \right] \\ &= J_0(x) \ln x + \left( 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots \right) \left( \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \dots \right) \\ y_2 &= J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} - \dots \end{aligned}$$

**NOTA:** observemos que

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^2 1(1)}{2^2 (1!)^2} &= \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \\ (-1)^3 \frac{1}{2^4 (2!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) &= -\frac{3}{2^4 2^2 2} = \frac{-3}{128} \\ (-1)^4 \frac{1}{2^6 (3!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) &= \frac{11}{2^6 6^2 6} = \frac{11}{13824} \end{aligned}$$

Por tanto

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots$$

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} (n!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^{2n} \quad (5.4)$$

Donde (5.4) es la segunda solución y es linealmente independiente con  $y_1$ .

La solución general es:

$$y = C_0 J_0(x) + C_1 y_2(x)$$

En vez de  $y_2(x)$  como segunda solución, se acostumbra tomar la siguiente función combinación lineal de  $y_2$  y  $J_0$ , como segunda solución:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)]$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler; a  $Y_0(x)$  se le llama función de Bessel de orden cero y de segunda especie y

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \approx 0,5772$$

Así  $Y_0(x)$  será igual a

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[ J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^{2n} + (\gamma - \ln 2) J_0(x) \right]$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[ J_0(x) \left( \gamma + \ln \frac{x}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \left( \frac{x}{2} \right)^{2n} \right]$$

La solución general es:  $y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$ , las gráficas de  $J_0(x)$  y  $Y_0(x)$  se muestran en la figura 5.2

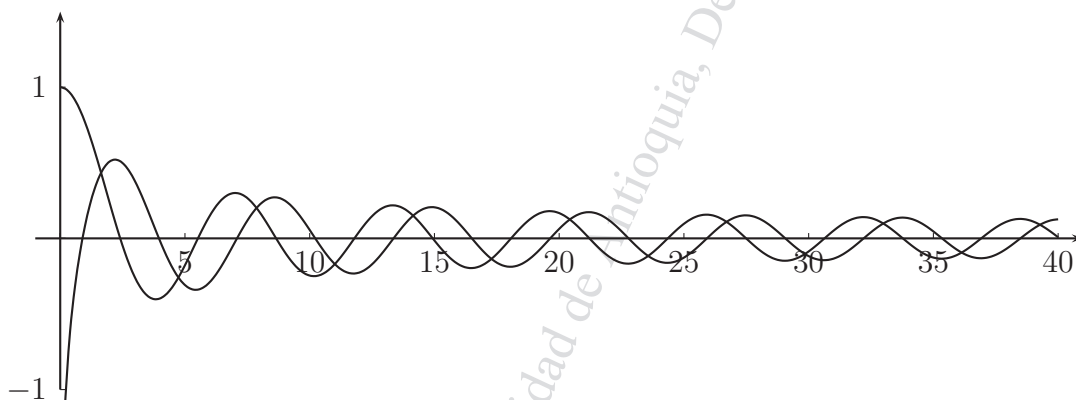


Figura 5.2  $J_0(x)$  y  $Y_0(x)$ .

#### 5.3.4. ECUACIÓN DE BESSEL DE ORDEN $p$ :

Sabemos que

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

se le llama E.D. de Bessel de orden  $p \geq 0$  y  $x > 0$ . Trabajemos con  $p > 0$  y veamos que  $x = 0$  es un punto singular regular. En efecto, como  $x^2 = 0$

entonces  $x = 0$  y

$$P(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2}$$

por tanto  $x = 0$  es un punto singular regular; suponemos una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

con  $C_0 \neq 0$  y  $0 < x < R$ ; derivamos dos veces y sustituimos en la E.D., el resultado es:

$$x^r \left[ (r^2 - p^2)C_0 x^0 + [(r+1)^2 - p^2]C_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r)^2 - p^2]C_n + C_{n-2}\} x^n \right] = 0$$

Luego,

$$\begin{aligned} (r^2 - p^2)C_0 &= 0 \\ [(r+1)^2 - p^2]C_1 &= 0 \\ [(n+r)^2 - p^2]C_n + C_{n-2} &= 0 \quad \text{para } n \geq 2 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Si  $C_0 \neq 0 \Rightarrow r^2 - p^2 = 0$  (ecuación indicial)

$$r = \pm p \Rightarrow r_1 = p \quad r_2 = -p \quad (\text{índices de la singularidad})$$

Si  $r_1 = p \Rightarrow$  en la ecuación (5.5):

$$[(p+1)^2 - p^2]C_1 = 0$$

$(1+2p)C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ , ya que  $p > 0$

$$[(n+p)^2 - p^2]C_n + C_{n-2} = 0 \quad n \geq 2$$

$$(n^2 + 2np)C_n + C_{n-2} = 0$$

$$n(n+2p)C_n + C_{n-2} = 0 \quad n \geq 2$$

$$C_n = -\frac{C_{n-2}}{n(n+2p)}, \quad n \geq 2$$

por tanto todos los coeficientes impares son cero, ya que  $C_1 = 0$ .

Iteramos los pares con  $n \geq 2$  y obtenemos:

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n C_0}{(2 \cdot 4 \dots 2n)(2+2p)(4+2p) \dots (2n+2p)},$$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n C_0}{2^{2n} n!(1+p)(2+p)(3+p) \dots (n+p)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

luego,

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+p} = x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Así,

$$y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n}$$

Al reemplazar (5.6), obtenemos:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^p C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(1+p)(2+p)(3+p) \dots (n+p)} \\ &= C_0 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+p}}{2^{2n+p} n!(1+p)(2+p)(3+p) \dots (n+p)} \\ &= K_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(1+p)(2+p)(3+p) \dots (n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

donde la constante  $K_0 = C_0 2^p$ .

Veamos los siguientes casos:

Ⓐ Si  $p$  es un entero positivo:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= p! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! p!(1+p)(2+p)(3+p) \dots (n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \\ &= p! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

a la expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

se le llama **función de Bessel** de orden  $p$  y primera especie y se denota por  $J_p(x)$ .

ⓑ Si  $p$  es diferente de un entero positivo:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \\ &= \Gamma(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+1)(1+p)(2+p)\cdots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y como } \Gamma(n+p+1) &= (n+p)\Gamma(n+p) \\ &= (n+p)(n+p-1)\Gamma(n+p-1) \\ &= (n+p)(n+p-1)\cdots(1+p)\Gamma(1+p) \end{aligned}$$

$$\text{entonces } y_1(x) = \Gamma(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

La expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} = J_p(x)$$

se le llama **función de Bessel** de orden  $p$  y primera especie y se denota por  $J_p(x)$ , (Ver gráfica 5.3).

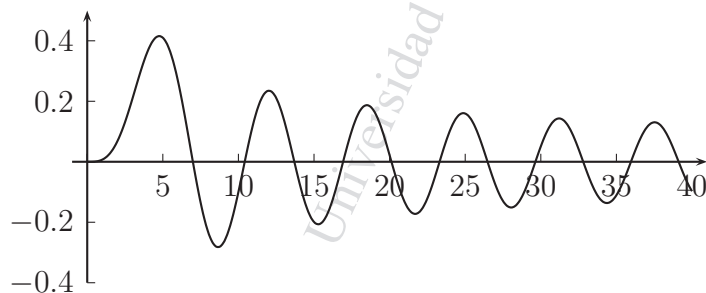


Figura 5.3  $J_{\frac{7}{2}}(x)$ .

En general para  $p =$  entero o  $p \neq$  entero y  $p > 0$

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

Para  $r_2 = -p$ , supongamos que  $r_1 - r_2 = p - (-p) = 2p$  y  $2p$  diferente de un entero positivo y  $p > 0$ .

La segunda solución es :

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} = J_{-p}(x)$$

que es la **función de Bessel** de orden  $-p$

La solución general,  $y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$  si  $2p \neq$  entero positivo  $p > 0$ . También, si  $2p =$  entero, pero  $p \neq$  entero, entonces la solución general es  $y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$

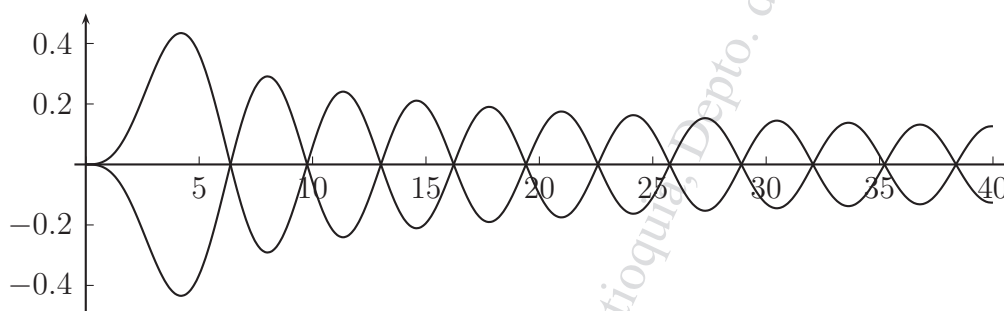


Figura 5.4  $J_3(x)$  y  $J_{-3}(x)$ .

Cuando  $r_1 - r_2 = 2p =$  entero positivo (caso ii.) y  $p$  es un entero, entonces  $J_p$  y  $J_{-p}$  son linealmente dependientes (Ejercicio)(Ver figura 5.4 con  $p = 3$ , obsérvese que  $J_{-3}(x) = -J_3(x)$ , es decir son linealmente dependientes). En este caso la segunda solución es de la forma

$$y_2(x) = C J_p \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p} \quad C \neq 0$$

O también podemos usar el método de reducción de D'Alembert como hicimos con la función de Bessel de orden cero y segunda especie  $Y_0(x)$ . Haciendo el mismo proceso, llegamos a  $Y_p(x) =$  Bessel de orden  $p$  y segunda

especie,

$$Y_p(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_p(x) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n-p} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} \right) \left( \frac{1}{n!(n+p)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n-p} \right) \right]$$

Donde  $\gamma$  es la constante de Euler. La solución  $Y_p$  se le llama función de Bessel de orden  $p$  y segunda especie.

Solución general:  $y = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$ , donde  $p$  es un entero positivo. Ver gráfica 5.5 para  $Y_p(x)$  con  $p = 1$ .

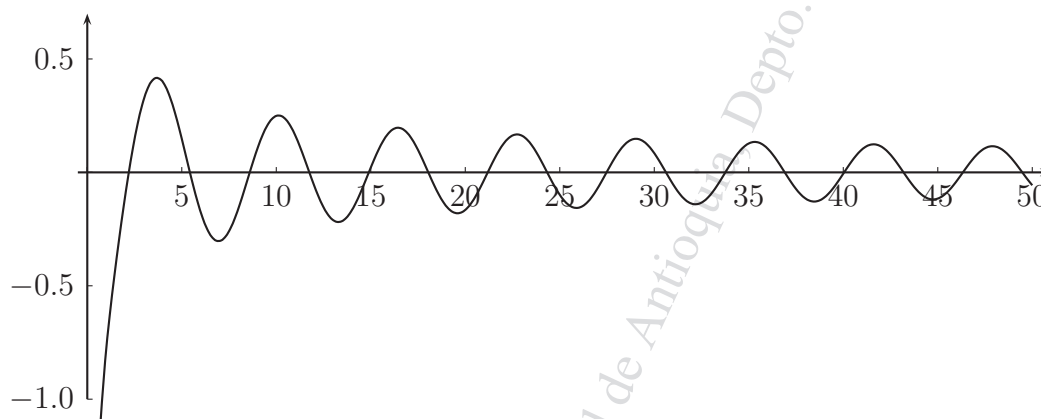


Figura 5.5  $Y_1(x)$

Las siguientes propiedades de la función de Bessel, se dejan como ejercicios.

**Ejercicio 1.** Mostrar que con el cambio de variable  $y = \frac{u(x)}{\sqrt{x}}$  reduce la E.D. de Bessel de orden  $p$  a la E.D.:

$$u''(x) + \left[ 1 + \left( \frac{1}{4} - p^2 \right) \frac{1}{x^2} \right] u = 0$$

**Ejercicio 2.** Con el resultado anterior, mostrar que la solución general de la E.D. de Bessel de orden  $p = \frac{1}{2}$  es:

$$y = C_1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

**Ejercicio 3.** Sabiendo que

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Mostrar que

$$\frac{d}{dx} [x^p J_p(kx)] = kx^p J_{p-1}(kx)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(kx)] = -kx^{-p} J_{p+1}(kx)$$

donde  $k = cte.$

**Ejercicio 4.** Con los resultados del ejercicio anterior, mostrar que:

$$\frac{d}{dx} [J_p(kx)] = kJ_{p-1}(kx) - \frac{p}{x} J_p(kx) \quad (*)$$

$$\frac{d}{dx} [J_p(kx)] = -kJ_{p+1}(kx) + \frac{p}{x} J_p(kx) \quad (**)$$

Y con esto mostrar que

$$\frac{d}{dx} [J_p(kx)] = \frac{k}{2} [J_{p-1}(kx) - J_{p+1}(kx)]$$

$$J_p(kx) = \frac{kx}{2p} [J_{p-1}(kx) + J_{p+1}(kx)]$$

**Ejercicio 5.** Hallar  $J_1(x)$  y  $\frac{d}{dx} J_1(x)$  en términos de  $J_0(x)$  y  $J_2(x)$ . Hallar  $J_{p+\frac{1}{2}}(x)$  en términos de  $J_{p-\frac{1}{2}}(x)$  y  $J_{p+\frac{3}{2}}(x)$ .

**Ejercicio 6.** Probar que  $\int J_1(x) dx = -J_0(x) + c$

**Ejercicio 7.** Probar que para  $p$  entero positivo:

i) Usando el ejercicio 4. y la aproximación

$$J_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right)$$

Probar que  $\int_0^\infty J_{p+1}(x) dx = \int_0^\infty J_{p-1}(x) dx$ .

ii) Sabiendo que  $\int_0^\infty J_0(x) dx = 1$  (ver ejercicio 21. de la sección 6.4), mostrar que  $\int_0^\infty J_p(x) dx = 1$

iii)  $\int_0^\infty \left(\frac{J_p(x)}{x}\right) dx = \frac{1}{p}$

**Ejercicio 8.** Para  $p = 0, 1, 2, \dots$  mostrar que:

i)  $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$

ii)  $J_p(-x) = (-1)^p J_p(x)$

iii)  $J_p(0) = 0, \quad p > 0$

iv)  $J_0(0) = 1$

v)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} Y_p(x) = -\infty$

**Ejercicio 9.** Comprobar que la E.D.

$$xy'' + (1 - 2p)y' + xy = 0$$

tiene la solución particular  $y = x^p J_p(x)$

(Ayuda: hacer  $u = x^{-p}y$ )

**Ejercicio 10.** Con el cambio de variable  $y = x^{-\frac{1}{2}}u(\lambda x)$ , hallar la solución general de

$$x^2 y'' + 2xy' + \lambda^2 x^2 y = 0$$

(Rta.:  $y = C_1 x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\lambda x) + C_2 x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\lambda x)$ )

---

### 5.3.5. PUNTO EN EL INFINITO

Para la E.D.:  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ , se desea saber el comportamiento de la solución en el infinito, para ello se hace el cambio de variable  $t = \frac{1}{x}$ .  
O sea que cuando  $x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0$ .

Derivemos dos veces (usando la regla de la cadena) y sustituyamos en la E.D.:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -t^2 \frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{dt}{dx} = \left[-t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt}\right] (-t^2) \\ y'' + \left[\frac{2}{t} - \frac{P(\frac{1}{t})}{t^2}\right] y' + \frac{Q(\frac{1}{t})}{t^4} &= 0 \end{aligned}$$

Si  $t = 0$  es punto ordinario entonces  $x$  en el infinito es un punto ordinario.

Si  $t = 0$  es un punto singular regular con exponentes de singularidad  $r_1, r_2$  entonces  $x$  en el infinito es un punto singular regular con exponentes de singularidad  $r_1, r_2$ .

Si  $t = 0$  es un punto singular irregular entonces  $x$  en el infinito es un punto singular irregular.

**Ejemplo 14.** Análizar los puntos en el infinito para la E.D. de Euler:

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

**Solución:** haciendo el cambio de variable  $t = \frac{1}{x}$  queda transformada en la E.D.:

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0$$

Por lo tanto  $t = 0$  es un punto singular regular y la ecuación indicial es  $r(r-1) - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1$ , por lo tanto  $x$  en el infinito es un punto singular regular con exponentes 2 y 1.

Para los ejercicios siguientes, decir si la E.D. tiene un punto singular regular o irregular en el infinito:

1).  $x^2y'' - 4y = 0$

(Rta.: hay un punto singular regular en el infinito)

2).  $x^3y'' + 2x^2y' + 3y = 0$

(Rta.: hay un punto singular regular en el infinito)

Para los ejercicios siguientes hallar las raíces indiciales y las dos soluciones en serie de Frobenius, linealmente independientes con  $|x| > 0$ .

1).  $4xy'' + 2y' + y = 0$

(Rta.:  $y_1 = \cos \sqrt{x}$ ,  $y_2 = \sin \sqrt{x}$ )

2).  $xy'' + 2y' + 9xy = 0$

(Rta.:  $y_1 = \frac{\cos 3x}{x}$ ,  $y_2 = \frac{\sin 3x}{x}$ )

3).  $xy'' + 2y' - 4xy = 0$

(Rta.:  $y_1 = \frac{\cosh 2x}{x}$ ,  $y_2 = \frac{\sinh 2x}{x}$ )

4).  $xy'' - y' + 4x^3y = 0$

(Rta.:  $y_1 = \cos x^2$ ,  $y_2 = \sin x^2$ )

5).  $4x^2y'' - 4xy' + (3 - 4x^2)y = 0$

(Rta.:  $y_1 = \sqrt{x} \cosh x$ ,  $y_2 = \sqrt{x} \sinh x$ )

6).  $2xy'' + 3y' - y = 0$

(Rta.:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}, y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$$

7).  $2xy'' - y' - y = 0$

(Rta.:

$$y_1 = x^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+3)} \right), y_2 = 1 - x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}$$


---

8).  $3xy'' + 2y' + 2y = 0$

(Rta.:

$$y_1 = x^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n! 4 \cdot 7 \dots (3n+1)} x^n, \quad y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n! 2 \cdot 5 \dots (3n-1)} x^n$$

9).  $2x^2y'' + xy' - (1 + 2x^2)y = 0$

(Rta.:

$$y_1 = x \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n! 7 \cdot 11 \dots (4n+3)} \right), \quad y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n! 1 \cdot 5 \dots (4n+1)}$$

10).  $2x^2y'' + xy' - (3 - 2x^2)y = 0$

(Rta.:  $y_1 = x^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 9 \cdot 13 \dots (4n+5)} x^{2n} \right)$ ,

$$y_2 = x^{-1} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n! 3 \cdot 7 \dots (4n-5)} x^{2n} \right)$$

11).  $6x^2y'' + 7xy' - (x^2 + 2)y = 0$

(Rta.:  $y_1 = x^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n! 19 \cdot 31 \dots (12n+7)} \right)$ ,

$$y_2 = x^{-\frac{2}{3}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n! 5 \cdot 17 \dots (12n-7)} \right)$$

12).  $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$

(Rta.:  $y_1 = x^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! 7 \cdot 13 \dots (6n+1)} x^{2n} \right)$ ,

$$y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! 5 \cdot 11 \dots (6n-1)} x^{2n}$$

13).  $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$

(Rta.:

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} x^n = x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)} x^n$$

14).  $2xy'' + (1 - 2x^2)y' - 4xy = 0$   
 (Rta.:

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!2^n} = x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}}, \quad y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3 \cdot 7 \dots (4n-1)} x^{2n}$$

15).  $xy'' + (3 - x)y' - y = 0$   
 (Rta.:  $y_1 = x^{-2}(1 + x)$ ,  $y_2 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$ )

16).  $xy'' + (5 - x)y' - y = 0$   
 (Rta.:  $y_1 = x^{-4}(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})$ ,  $y_2 = 1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+4)!}$ )

17).  $xy'' + (x - 6)y' - 3y = 0$   
 (Rta.:

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{120}x^3, \quad y_2 = x^7 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (n+3)}{n! 8 \cdot 9 \cdot 10 \dots (n+7)} x^n \right)$$

18).  $5xy'' + (30 + 3x)y' + 3y = 0$   
 (Rta.:  $y_1 = x^{-5}(1 - \frac{3}{5}x + \frac{9}{50}x^2 - \frac{9}{250}x^3 + \frac{27}{5000}x^4)$ ,  
 $y_2 = 1 + 120 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(n+5)! 5^n} x^n$ )

19).  $xy'' - (4 + x)y' + 3y = 0$   
 (Rta.:  $y_1 = 1 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3$ ,  $y_2 = x^5(1 + 120 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+5)!} x^n)$ )

20).  $x^2y'' + (2x + 3x^2)y' - 2y = 0$   
 (Rta.:  $y_1 = x^{-2}(2 - 6x + 9x^2)$ ,  $y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{(n+2)!} x^n$ )

21).  $x(1 - x)y'' - 3y' + 2y = 0$   
 (Rta.:  $y_1 = 3 + 2x + x^2$ ,  $y_2 = \frac{x^4}{(1-x)^2}$ )

22).  $xy'' + 2y' - xy = 0$   
 (Rta.:  $y_1 = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\cosh x}{x}$ ,  $y_2 = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sinh x}{x}$ )

---

23).  $x(x-1)y'' + 3y' - 2y = 0$

(Rta.:  $y_1 = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2$ ,  $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+4}$ )

24).  $xy'' + (1-x)y' - y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ ,  $y_2 = y_1(x) \ln|x| + y_1(x)(-x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3 \cdot 3!}x^3 + \frac{1}{4 \cdot 4!}x^4 - \dots)$ )

25).  $xy'' + y' + y = 0$

(Rta.:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n, \quad y_2 = y_1(x) \ln|x| + y_1(x)(2x + \frac{5}{4}x^2 + \frac{23}{27}x^3 + \dots)$$

26).  $x^2y'' + x(x-1)y' + y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = xe^{-x}$ ,  $y_2 = xe^{-x}(\ln|x| + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3 \cdot 3!}x^3 + \dots)$ )

27).  $xy'' + (x-1)y' - 2y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2 = \frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ )

28).  $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2 = e^x \ln|x|$ )

29).  $y'' + \frac{6}{x}y' + (\frac{6}{x^2} - 1)y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = \frac{\sinh x}{x^3}$ ,  $y_2 = \frac{\cosh x}{x^3}$ )

30).  $y'' + \frac{3}{x}y' + 4x^2y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$ ,  $y_2 = \frac{\cos x^2}{x^2}$ )

31).  $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = x$ ,  $y_2 = \frac{1}{x^2}$ )

32).  $xy'' + 2y' + xy = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $y_2 = \frac{\cos x}{x}$ )

33).  $xy'' + (1 - 2x)y' - (1 - x)y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2 = e^x \ln|x|$ )

34).  $y'' - 2y' + (1 + \frac{1}{4x^2})y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = \sqrt{x} e^x$ ,  $y_2 = \sqrt{x} e^x \ln|x|$ )

35).  $x(x-1)y'' - (1-3x)y' + y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $y_2 = \frac{\ln|x|}{1-x}$ )

36).  $y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} + \dots$ ,  $y_2 = \ln|x|y_1 - (\frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{8 \cdot 16} + \dots)$ )

37).  $y'' + \frac{x+1}{2x}y' + \frac{3}{2x}y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = \sqrt{x} (1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 + \dots)$ ,  $y_2 = 1 - 3x + 2x^2 + \dots$ )

38).  $x^2y'' + x(x-1)y' - (x-1)y = 0$

(Rta.:  $y_1(x) = x$ ,  $y_2 = x \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n} x^{n+1}$ )

39).  $xy'' - x^2y' + (x^2 - 2)y = 0$  con  $y(0) = 0$  y  $y'(0) = 1$

(Rta.:  $y = xe^x$ )

40). La ecuación hipergeométrica de Gauss es

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)]y' - \alpha\beta y = 0$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  son constantes

a). Mostrar que  $x = 0$  es un punto singular regular con exponente de singularidad  $0$  y  $1 - \gamma$ .

b). Si  $\gamma$  es un entero positivo, mostrar que

$$y(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

con  $C_0 \neq 0$ , cuya relación de recurrencia es:

$$C_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(\gamma + n)(1 + n)} C_n$$

para  $n \geq 0$

c). Si  $C_0 = 1$  entonces

$$y(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_n}{n! \gamma_n} x^n$$

donde  $\alpha_n = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha + n - 1)$  para  $n \geq 1$  y similarmente se definen  $\beta_n$  y  $\gamma_n$ .

d). La serie en c) se le llama serie hipergeométrica y se denota por  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ . Demostrar que:

- 1)  $F(1, 1, 1, x) = \frac{1}{1-x}$  (la serie geométrica)
- 2)  $x F(1, 1, 2, -x) = \ln(1 + x)$
- 3)  $x F(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2) = \tan^{-1} x$
- 4)  $F(-k, 1, 1, -x) = (1 + x)^k$  (la serie binomial).

## 5.4. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

**Ejemplo 15.** Resolver la E.D. del Ejemplo 5.  $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$

```
>Eqn1:={ (x^2-1)*D(D(y))(x)+4*x*D(y)(x)+2*y(x)=0, D(y)(0)=C1, y(0)=C0};
```

```
Eqn1 :=
```

```
{(x^2-1)*D(D(y))(x)+4*x*D(y)(x)+2*y(x) = 0, D(y)(0) = C1, y(0) = C0}
```

```
>Order:=8:
```

```
>Sol1:=dsolve(Eqn1,y(x),series);
```

```
Sol1 := y(x) = C0+C1x+C0x^2+C1x^3+C0x^4+C1x^5+C0x^6+C1x^7+O(x^8)
```

**Ejemplo 16.** Para el ejemplo anterior, hallar la relación de recurrencia, iterarla hasta  $n = 8$  y luego dar la solución.

Debemos cambiar el formato de entrada de la E.D.

```
>eqn2:=(x^2-1)*diff(y(x),x,x)+4*x*diff(y(x),x)+2*y(x)=0;
```

```
> eqn2 := (x^2 - 1) * diff(y(x), x, x) + 4 * x * diff(y(x), x) + 2 * y(x) = 0
```

```
>SeriesSol:=sum(a[n]*x^n,n=k-2..k+2);
```

```
SeriesSol := a[k - 2]x^(k-2) + a[-1 + k]x^(-1+k) + a[k]x^k + a[1 + k]x^(1+k) +
a[k + 2]x^(k+2)
```

```
>simplify(simplify(subs(y(x)=SeriesSol,eqn2)));
```

```
-(-5a[k - 2]x^(k-2)k + 3a[k + 2]x^(k+2)k - a[k]x^k k + a[1 + k]x^(1+k)k - x^k a[k -
2]k^2 - x^(1+k)a[-1 + k]k
-3a[-1 + k]x^(-1+k)k - 3x^(k+2)a[k]k + x^k a[k]k^2 + x^(k+2)a[k + 2]k^2 + 2a[-1 +
k]x^(-1+k)
+6a[k - 2]x^(k-2) + x^(k-2)a[k - 2]k^2 + x^(-1+k)a[-1 + k]k^2 + 2a[k + 2]x^(k+2) -
x^(1+k)a[-1 + k]k^2
-7x^(k+2)a[k + 2]k + x^(1+k)a[1 + k]k^2 + x^k a[k - 2]k - x^(k+2)a[k]k^2 - 5x^(k+3)a[1 + k]k
-x^(k+3)a[1 + k]k^2 - x^(k+4)a[k + 2]k^2 - 2a[k]x^(k+2) - 6a[1 + k]x^(k+3) - 12a[k +
2]x^(k+2))/x^2 = 0
```

```
>a[k+2]:=simplify(solve(coeff(lhs(%),x^(k+2)),a[k+2]));
```

$$a[k + 2] := a[k]$$

```
>a[0]:=C0:a[1]:=C1:
```

```
> for k from 2 to 8 do a[k]:=a[k-2] od:
```

```
> Sol2:=sum(a[j]*x^j,j=0..8);
```

```
Sol2 := C0 + C1x + C0x^2 + C1x^3 + C0x^4 + C1x^5 + C0x^6 + C1x^7 + C0x^8
```

```
>Y1:=C0*sum('x^(2*k)',k=0..infinity);
```

$$Y1 := -\frac{C0}{x^2 - 1}$$

```
>Y2:=C1*sum('x*x^(2*k)',k=0..infinity);
```

$$Y_2 := -\frac{C_1 x}{x^2 - 1}$$

**Ejemplo 17.** Las siguientes instrucciones grafican las funciones de Bessel de primera especie y segunda especie.

```
>plot(BesselJ(3,x),x=0..50,y=-0.5..0.5);  
>plot(BesselY(1,x),x=.1..50,y=-1..0.5);
```

*Universidad de Antioquia, Depto. de Matematicas*

---