CAPÍTULO 2

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

2.1. VARIABLES SEPARABLES

Definición 2.1. *Se dice que una E.D. de la forma:* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ *es separable o de variables separables.*

La anterior ecuación se puede escribir como $h(y)\,dy = g(x)\,dx$ e integrando:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C,$$

obteniéndose así una familia uniparamétrica de soluciones.

Nota: la constante o parámetro C, a veces es conveniente escribirla de otra manera, por ejemplo, múltiplos de constantes o logaritmos de constantes o exponenciales de constantes o si aparece la suma de varias constantes reunirlas en una sola constante.

Ejemplo 1. $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
Solución:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y} = e^{3x}e^{2y}$$

separando variables

$$\frac{dy}{e^{2y}} = e^{3x}dx$$

e integrando

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} + C = \frac{e^{3x}}{3}$$

la solución general es

$$\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{-2y}}{2} = C$$

Ejemplo 2. $\frac{dy}{dx} = xy^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, con $y(0) = 1$

Solución: separando variables

$$y^{-3}dy = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \left\{ \text{haciendo} \begin{array}{lcl} u & = & 1+x^2 \\ du & = & 2xdx \end{array} \right.$$

obtenemos

$$= \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$\text{e integrando} \quad \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

solución general

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C.$$

Cuando $x = 0,\ y = 1$

$$-\frac{1}{2\times 1} = \sqrt{1+0^2} + C$$

luego $C = \frac{-3}{2}$
La solución particular es

$$\frac{-1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2}$$

Resolver los siguientes ejercicios por el método de separación de variables:

Ejercicio 1. $(4y + yx^2)\,dy - (2x + xy^2)\,dx = 0$
(**Rta.** $2 + y^2 = C(4 + x^2)$)

Ejercicio 2. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
(**Rta.** $y = -\frac{1}{\cos x + c}$)

Ejercicio 3. $3e^x \tan y\,dx + (2 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0$
(**Rta.** $(2 - e^x)^3 = C \tan y$)

Ejercicio 4. $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$, si $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$
(**Rta.** $\ln y = \csc x - \cot x$)

Ejercicio 5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$
(**Rta.** $(\frac{y+3}{x+4})^5 = Ce^{y-x}$)

Ejercicio 6. $x^2 y' = y - xy$, si $y(-1) = -1$
(**Rta.** $\ln|y| = -\frac{1}{x} - \ln|x| - 1$)

Ejercicio 7. Hallar la solución general de la E.D. $\frac{dy}{dx} - y^2 = -9$ y luego hallar en cada caso una solución particular que pase por:
a) $(0, 0)$, b) $(0, 3)$, c) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
(**Rta.** a) $\frac{y-3}{y+3} = -e^{6x}$, b) $y = 3$, c) $\frac{y-3}{y+3} = -\frac{1}{2}e^{-2}e^{6x}$)

Ejercicio 8. Se suministran bacterias como alimento a una población de protozoarios a una razón constante μ. Se ha observado que las bacterias son devoradas a una tasa proporcional al cuadrado de su cantidad. Si $c(t)$ es la cantidad de bacterias en el instante t, hallar la E.D.; determinar $c(t)$ en función de $c(0)$; ¿cuál es la concentración de equilibrio de las bacterias, es decir, cuando $c'(t) = 0$?
(**Rta.:** $\frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{k}c(t)}{\sqrt{\mu}-\sqrt{k}c(t)} = \frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{k}c(0)}{\sqrt{\mu}-\sqrt{k}c(0)} e^{2\sqrt{k\mu}t}$; concentración de equilibrio $c = \sqrt{\frac{\mu}{k}}$)

Ejercicio 9. Resolver por variables separables: $a\left[x\frac{dy}{dx}+2y\right]=xy\frac{dy}{dx}$ en $y=a$ y $x=2a$.
(**Rta.:** $yx^2=\frac{4a^3}{e}e^{\frac{y}{a}}$)

2.2. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Definición 2.2. *$f(x,y)$ es homogénea de grado n si existe un real n tal que para todo t: $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$.*

Ejemplo 3. $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ es homogénea de grado dos.

Definición 2.3. *Si una ecuación en la forma diferencial :*

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

tiene la propiedad que $M(tx,ty)=t^nM(x,y)$ y $N(tx,ty)=t^nN(x,y)$, entonces decimos que es de coeficientes homogéneos o que es una E.D. homogénea.

Siempre que se tenga una E.D. homogénea podrá ser reducida por medio de una sustitución adecuada a una ecuación en variables separables.

Método de solución: dada la ecuación

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado; mediante la sustitución $y=ux$ ó $x=yv$ (donde u ó v son nuevas variables dependientes), puede transformarse en una ecuación en variables separables.

Nota: si la estructura algebraica de N es más sencilla que la de M, entonces es conveniente usar las sustitución $y=ux$.
Si la estructura algebraica de M es más sencilla que la de N, es conveniente usar la sustitución $x=vy$.

Ejemplo 4. Resolver por el método de las homogéneas, la siguiente E.D.: $(x+ye^{\frac{y}{x}})\,dx-xe^{\frac{y}{x}}\,dy=0$, con $y(1)=0$.

Solución:
$(x + ye^{\frac{y}{x}})\, dx - xe^{\frac{y}{x}}\, dy = 0$ donde

$$\overbrace{M(x,y) = x + ye^{\frac{y}{x}}}^{\text{homogénea de grado 1}} \quad \text{y} \quad \overbrace{N(x,y) = -xe^{\frac{y}{x}}}^{\text{homogénea de grado 1}}$$

Como N es más sencilla que M, hacemos la sustitución: $y = ux$, por tanto $dy = u\, dx + x\, du$
Sustituyendo en la E.D.

$$(x + uxe^{\frac{ux}{x}})\, dx - xe^{\frac{ux}{x}}(u\, dx + x\, du) = 0$$

o sea que

$$x\, dx - x^2 e^u\, du = 0$$

luego $x\, dx = x^2 e^u\, du$, separando variables y considerando $x \neq 0$, obtenemos,

$$\frac{dx}{x} = e^u\, du \Rightarrow \ln x = e^u + C$$

Por lo tanto la solución general es

$$\ln x = e^{\frac{y}{x}} + C$$

Para hallar la solución particular que pasa por el punto $y(1) = 0$, sustituimos en la solución general y obtenemos:

$\ln 1 = e^{\frac{0}{1}} + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 + C$ de donde $C = -1$

Por lo tanto,

$$\ln x = e^{\frac{y}{x}} - 1$$

es la solución particular

Ejemplo 5. $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ (ayuda: hacer $y = z^\alpha$ y calcular α para convertirla en homogénea)
Solución:
No es homogénea; hagamos $y = z^\alpha$ y hallemos α de tal manera que la E.D.O. se vuelva homogénea:

$$dy = \alpha z^{\alpha-1} dz$$

$$(x^2z^{2\alpha}-1)\alpha z^{\alpha-1}dz+2xz^{3\alpha}dx=0$$
$$\alpha(x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1})dz+2xz^{3\alpha}dx=0 \tag{2.1}$$

suma de exponentes en los términos: $2+3\alpha-1$, $\alpha-1$ y $1+3\alpha$ respectivamente.

Análisis de exponentes para que se cumpla la homogeneidad:

$1+3\alpha=2+3\alpha-1=\alpha-1$, se concluye $\alpha=-1$

Sustituyo en la E.D. (2.1): $(-1)(x^2z^{-2}-1)z^{-2}\,dz+2xz^{-3}\,dx=0$

$$(-x^2z^{-4}+z^{-2})\,dz+2xz^{-3}\,dx=0$$

Es homogénea de orden -2.

La sustitución más sencilla es $x=uz \Rightarrow dx=u\,dz+z\,du$.

$$(-u^2z^2z^{-4}+z^{-2})\,dz+2uzz^{-3}(u\,dz+z\,du)=0$$

$$(-u^2z^{-2}+z^{-2}+2u^2z^{-2})\,dz+(2uz^{-1})\,du=0$$

$$(u^2z^{-2}+z^{-2})\,dz+2uz^{-1}\,du=0$$

$$z^{-2}(u^2+1)\,dz+2uz^{-1}\,du=0$$

$$\frac{z^{-2}dz}{z^{-1}}+\frac{2u}{u^2+1}\,du=0$$

$$\frac{dz}{z}+\frac{2u}{u^2+1}\,du=0$$

Integrando: $\ln|z|+\ln(u^2+1)=\ln C$

$$\ln|z(u^2+1)|=\ln C \Rightarrow z(u^2+1)=C$$

reemplazo $u=\frac{x}{z}$ y tenemos, tomando $z\neq 0$

$$\frac{x^2}{z} + z = C$$

Como $y = z^{-1}$ o sea que $z = y^{-1}$, entonces $\frac{x^2}{y^{-1}} + y^{-1} = C$
luego

$$x^2y^2 + 1 = Cy,$$

es la solución general.

Resolver los siguientes ejercicios por el método de las homogéneas, ó convertirla en homogénea y resolverla según el caso:

Ejercicio 1. $\left(y + x \cot \frac{y}{x}\right) \, dx - x \, dy = 0.$
(**Rta.:** $C = x \cos \frac{y}{x}$)

Ejercicio 2. $(x + \sqrt{y^2 - xy})\frac{dy}{dx} = y$, con $y(1) = 1$.
(**Rta.:** $\ln^2 |y| = 4(\frac{y-x}{y})$)

Ejercicio 3. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) \, dx + x \cos \frac{y}{x} \, dy = 0.$
(**Rta.:** $\ln |x| + \operatorname{sen} \frac{y}{x} = C$)

Ejercicio 4. $(x^2 - 2y^2) \, dx + xy \, dy = 0.$
(**Rta.:** $x^4 = C(x^2 - y^2)$)

Ejercicio 5. $xy' = y + 2xe^{\frac{-y}{x}}$.
(**Rta.:** $\ln x = \frac{1}{2}e^{\frac{y}{x}} + C$)

Ejercicio 6. $(x + y^3) \, dx + (3y^5 - 3y^2x) \, dy = 0$, (Ayuda: hacer $x = z^\alpha$).
(**Rta.:** $\ln |C(x^2 + y^6)| = 2 \arctan \frac{y^3}{x}$)

Ejercicio 7. $2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2}) \, dx + x^3 \, dy = 0$, (Ayuda: hacer $y = z^\alpha$).
(**Rta.:** $x^4(1 + 2Cy) = C^2$)

Ejercicio 8. $y \cos x \, dx + (2y - \operatorname{sen} x) \, dy = 0$, (Ayuda: hacer $u = \operatorname{sen} x$).
(**Rta.:** $y^2 = Ce^{-\frac{\operatorname{sen} x}{y}}$)

Ejercicio 9. $y(\ln \frac{y}{x} + 1) \, dx - x \ln \frac{y}{x} \, dy = 0.$
(**Rta.:** $\ln |x| - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{y}{x}\right) = C$)

Ejercicio 10. $\frac{dy}{dx} = \cos(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}$.
(**Rta.:** $\sec(\frac{y}{x}) + \tan(\frac{y}{x}) = Cx$)

Ejercicio 11. Hallar la solución particular de la E.D.

$$yx^2dx - (x^3 + y^3)dy = 0,$$

donde $y(0) = 1$
(**Rta.:** $\ln|y| = \frac{1}{3}(\frac{x}{y})^3$)

Ejercicio 12. Hallar la solución particular de la E.D.

$$xy^2dy - (x^3 + y^3)dx = 0,$$

donde $y(1) = 0$
(**Rta.:** $\ln|x| = \frac{1}{3}(\frac{y}{x})^3$)

Ejercicio 13. $(y + \sqrt{xy})dx - 2xdy = 0$
(**Rta.:** $x(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1)^4 = C$, si $x > 0, y > 0$ y $x(\sqrt{\frac{y}{x}} + 1)^4 = C$, si $x < 0, y < 0$)

Ejercicio 14. Hallar la solución particular de la E.D.

$$y(\ln y - \ln x - 1)dx + xdy = 0,$$

donde $y(e) = 1$
(**Rta.:** $x\ln|\frac{y}{x}| = e$)

2.3. E.D. DE COEFICIENTES LINEALES: $(ax + by + c)\,dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)\,dy = 0$

Se presentan dos casos:

1. Si (h, k) es el punto de intersección entre las rectas:

$$ax + by + c = 0 \text{ y } \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

entonces se hace la sustitución: $x = u + h$ y $y = v + k$ y se consigue la ecuación homogénea:

$$(au + bv)du + (\alpha u + \beta v)dv = 0$$

2. Si las dos rectas no se intersectan (o sea son paralelas), entonces

$$\alpha x + \beta y = n(ax + by)$$

y por tanto se hace la sustitución $z = ax + by$, lo cual quiere decir que $\alpha x + \beta y = nz$, esta sustitución convierte la E.D. en una E.D. de variables separables.

Ejercicios: resolver por el método anterior:

1. $(x - y + 1)\,dx + (x + 2y - 5)\,dy = 0$
(**Rta.:** $(x-1)^2 + 2(y-2)^2 = Ce^{\sqrt{2}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}(y-2)}}$)

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$
(**Rta.:** $(x + y + 1)^3 = C(y - x + 3)$)

3. $(x - 2y + 4)\,dx + (2x - y + 2)\,dy = 0$
(**Rta.:** $(x + y - 2)^3 = C^2(x - y + 2)$)

4. $(x + y + 1)^2\,dx + (x + y - 1)^2\,dy = 0$
(**Rta.:** $4x = -\frac{1}{2}(x + y)^2 + 2(x + y) - \ln|x + y| + C$)

5. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$
(**Rta.:** $4 - x - 2y = 3\ln|2 - x - y| + C$)

6. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$
(**Rta.:** $C = 2(x + 1)(y - 3) + (x + 1)^2 - (y - 3)^2$)

7. $(x - y - 5)\,dx - (x + y - 1)\,dy = 0$
(**Rta.:** $(x + y - 1)^2 - 2(x - 3)^2 = C$)

8. $(2x + y)\,dx - (4x + 2y - 1)\,dy = 0$
(**Rta.:** $x = \frac{2}{5}(2x + y) - \frac{4}{25} - \frac{1}{25}\ln|5(2x + y) - 2| + C$)

2.4. ECUACIONES EXACTAS

Si $z = f(x, y)$, entonces

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

es la diferencial total de f; pero si $z = c = f(x,y)$ (familia de curvas uniparamétricas en el plano XY), entonces

$$dz = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Definición 2.4. *La forma diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ es una diferencial exacta en una región R del plano XY si corresponde a la diferencial total de alguna función $f(x,y)$.*

La ecuación $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, es exacta si es la diferencial total de alguna función $f(x,y) = c$.

Teorema 2.1 (Criterio para E.D. exactas).

Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región R del plano XY, entonces la condición necesaria y suficiente para que la forma diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

sea una diferencial exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Demostración: como $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ es una diferencial exacta, entonces existe una función $f(x,y)$ tal que:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = d\,f(x,y)$$

luego

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

y

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

por tanto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La igualdad entre las derivadas cruzadas se produce porque M y N son continuas con derivadas de primer orden continuas.

<u>Método</u>. Dada la ecuación $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$, hallar una función $f(x,y)=C$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=N$$

i) Comprobar que es exacta, es decir, verificar que $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

ii) Suponer que $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ y luego integrar con respecto a x dejando a y constante:

$$f(x,y)=\int M(x,y)\,dx+g(y) \tag{2.2}$$

iii) Derivar con respecto a y la ecuación (2.2)

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx+g'(y)=N(x,y)$$

despejar

$$g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \tag{2.3}$$

Esta expresión es independiente de x, en efecto:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$
$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=0$$

iv) Integrar la expresión (2.3) con respecto a y y sustituir en (2.2) e igualar a C. ■

Nota: en ii) se pudo haber comenzado por $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$.

Ejemplo 6. Resolver la siguiente E.D.:
$(2xy^2+ye^x)\,dx+(2x^2y+e^x-1)\,dy=0$

Solución:
paso i)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4xy + e^x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 4xy + e^x\end{array}\right\} \text{ de donde } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

paso ii)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int N(x,y)\,dy + h(x) = \int (2x^2y + e^x - 1)\,dy + h(x) \\ &= x^2y^2 + ye^x - y + h(x)\end{aligned}$$

paso iii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = M &= 2xy^2 + ye^x \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^2 + ye^x + h'(x) \Rightarrow h'(x) = 0\end{aligned}$$

paso iv) $h(x) = C$
paso v) sustituyo $h(x)$ en el paso ii):

$$\begin{aligned} x^2y^2 + ye^x - y + C_1 &= C \\ x^2y^2 + ye^x - y &= C_2 \quad \text{Solución general}\end{aligned}$$

Ejemplo 7. Hallar el valor de b para que sea exacta la E.D.:

$$(xy^2 + bx^2y)\,dx + (x+y)x^2\,dy = 0.$$

Solución:
Como $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + bx^2$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$ entonces $b = 3$, por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 + 3x^2y \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + x^2y \qquad (2.5)$$

integramos (2.4) :

$$f(x,y) = \int (xy^2 + 3x^2y)\,dx + g(y) = y^2\frac{x^2}{2} + x^3y + g(y) \qquad (2.6)$$

derivamos (2.6) con respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = yx^2 + x^3 + g'(y) \tag{2.7}$$

igualamos (2.5) y (2.7)

$$x^3 + x^2 y \;=\; yx^2 + x^3 + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \tag{2.8}$$

luego $g(y) = K$ y reemplazando en (2.6)

$$f(x,y) = y^2 \frac{x^2}{2} + x^3 y + K = C_1$$

y por tanto la solución general es

$$\frac{y^2 x^2}{2} + x^3 y = C$$

Ejercicio 1. Resolver la siguiente E.D. por el método de las exactas :

$$(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\, dx + \cos x \cos y\, dy = 0.$$

(**Rta.:** $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y - \ln|\cos x| = C$)

Ejercicio 2. Resolver la siguiente E.D. por el método de las exactas:

$$(y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x)\, dx + (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\, dy = 0, \text{ con } y(0) = e.$$

(**Rta.:** $f(x,y) = y^2 \operatorname{sen} x - x^3 y - x^2 + y(\ln y - 1) = 0$)

Ejercicio 3. Determinar la función $M(x,y)$ de tal manera que la siguiente E.D.O sea exacta:

$$M(x,y)\, dx + \left(x e^x y + 2xy + \frac{1}{x} \right) dy = 0$$

(**Rta.:** $M(x,y) = \frac{1}{2} y^2 e^x (x+1) + y^2 - \frac{y}{x^2} + g(x)$)

Ejercicio 4. Determinar la función $N(x,y)$ para que la siguiente E.D. sea exacta:

$$\left(y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{x^2 + y} \right) dx + N(x,y)\, dy = 0$$

(**Rta.:** $N(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2+y)^{-1} + g(y)$)

Ejercicio 5. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(2xy^2 + ye^x)\,dx + (2x^2y + e^x - 1)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = y(x^2y + e^x - 1) = C$)

Ejercicio 6. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(2x - y\operatorname{sen} xy - 5y^4)\,dx - (20xy^3 + x\operatorname{sen} xy)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = x^2 + \cos(xy) - 5y^4x = C$)

Ejercicio 7. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(\operatorname{sen} xy + xy\cos xy)\,dx + (x^2\cos xy)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = x\operatorname{sen}(xy) = C$)

Ejercicio 8. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(ye^{xy} + 4y^3)\,dx + (xe^{xy} + 12xy^2 - 2y)\,dy = 0, \text{ con } y(0) = 2$$

(**Rta.:** $f(x,y) = e^{xy} + 4xy^3 - y^2 = -3$)

Ejercicio 9. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(1 - \operatorname{sen} x\tan y)\,dx + \cos x\sec^2 y\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = \cos x\tan y + x = C$)

2.5. FACTORES DE INTEGRACIÓN

Definición 2.5 (Factor Integrante F.I.). *Sea la E.D.*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Si $\mu(x,y)$ es tal que

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

es una E.D. exacta, entonces decimos que $\mu(x,y)$ es un factor integrante (F.I.).

Ejemplos de algunas formas diferenciales que son exactas.
Ejemplo: $x\,dx + y\,dy$ es la diferencial de $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ ya que $d\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right) = x\,dx + y\,dy$.

Análogamente: para $x\,dy + y\,dx = d(xy)$.

Pero $py\,dx + qx\,dy$ no es exacta, la expresión $\mu(x,y) = x^{p-1}y^{q-1}$ es un factor integrante.

Para $y\,dx - x\,dy$, las expresiones:

$$\mu = \frac{1}{y^2}\ ;\ \mu = \frac{1}{x^2}\ ;\ \mu = \frac{1}{xy}\ ;\ \mu = \frac{1}{x^2+y^2}\ ;\ \mu = \frac{1}{ax^2+bxy+cy^2}$$

son factores integrantes.

Teorema 2.2 (**Teorema del Factor Integrante**).

Sea $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ una E.D. y $\mu(x,y)$ un factor integrante, con M, N y μ continuas y con primeras derivadas parciales continuas , entonces

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{d\mu}{dx} = -M\frac{d\mu}{dy}$$

Demostración: si μ es tal que $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ es exacta y μ, M, N tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

o sea que

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

luego

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = N\left[\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{M}{N}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right]$$

como $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$, entonces:

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\left[\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right] = N\frac{d\mu}{dx} = -M\frac{d\mu}{dy}$$

ya que si $\mu = \mu(x, y)$ y $\quad y = y(x)$ entonces:

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}\,dy$$

y por tanto

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad \blacksquare$$

Nota.

1. Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$,
   entonces $\mu f(x) = \frac{d\mu}{dx}$ y por tanto $f(x)dx = \frac{d\mu}{\mu}$,
   luego $\mu = ke^{\int f(x)dx}$; tomando $k = 1$ se tiene $\mu = e^{\int f(x)dx}$.

2. Similarmente, si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = g(y)$, entonces $\mu = e^{\int g(y)dy}$.

Ejemplo 8. $(2xy^2 - 2y)\,dx + (3x^2y - 4x)\,dy = 0$.
Solución:

$$M(x, y) = 2xy^2 - 2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 2$$

$$N(x, y) = 3x^2y - 4x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy - 4$$

luego

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy + 2$$

por tanto

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{-2xy + 2}{-2xy^2 + 2y} = \frac{2(-xy + 1)}{2y(-xy + 1)}$$

luego

$$g(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow F.I. = \mu(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln|y|} = y$$

multiplico la E.D. original por y: $(2xy^3 - 2y^2)\,dx + (3x^2y^2 - 4xy)\,dy = 0$

el nuevo $M(x, y) = 2xy^3 - 2y^2$ y el nuevo $N(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy$

Paso 1.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 - 4y$$

y

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 - 4y$$

luego es exacta.

Paso 2.

$$f(x, y) = \int (2xy^3 - 2y^2)dx + g(y) = x^2y^3 - 2xy^2 + g(y)$$

Paso 3. Derivando con respecto a y:

$$N = 3x^2y^2 - 4xy = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4xy + g'(y)$$

luego $g'(y) = 0$

Paso 4. $g(y) = k$

Paso 5. Reemplazo en el paso 2.

$$f(x, y) = x^2y^3 - 2xy^2 + k = c$$

luego $x^2y^3 - 2xy^2 = k_1$ que es la solución general.

Ejemplo 9. $x\,dy - y\,dx = (6x^2 - 5xy + y^2)\,dx$

<u>Solución:</u>

como $d(\frac{y}{x}) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$

entonces dividimos a ambos lados de la E.D. por x^2, luego

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \left(\frac{6x^2 - 5xy + y^2}{x^2}\right) dx$$

luego

$$d(\frac{y}{x}) = \left(6 - 5(\frac{y}{x}) + (\frac{y}{x})^2\right) dx,$$

hagamos $u = \frac{y}{x} \Rightarrow du = (6 - 5u + u^2)dx$

luego $\dfrac{du}{6 - 5u + u^2} = dx \Rightarrow \dfrac{du}{(u-3)(u-2)} = dx$

pero por fracciones parciales $\dfrac{1}{(u-3)(u-2)} = \dfrac{A}{u-3} + \dfrac{B}{u-2}$

o sea que $A = 1$ y $B = -1$, por tanto

$$\int \frac{du}{(u-3)(u-2)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{du}{u-3} - \int \frac{du}{u-2} = \ln|u-3| - \ln|u-2| + \ln c = x$$

luego

$$c\frac{(u-3)}{(u-2)} = e^x, \text{ si } x \neq 0 \Rightarrow c\frac{(y-3x)}{(y-2x)} = e^x$$

Obsérvese que $x = 0$ es también solución y es singular porque no se desprende de la solución general.

En los siguientes ejercicios, hallar el factor integrante y resolver por el método de las exactas:

Ejercicio 1. $(\cos(2y) - \operatorname{sen} x)\, dx - 2\tan x \operatorname{sen}(2y)\, dy = 0$.
(**Rta.:** $\operatorname{sen} x \cos(2y) + \frac{1}{2}\cos^2 x = C$)

Ejercicio 2. $(3xy^3 + 4y)\, dx + (3x^2y^2 + 2x)\, dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x, y) = x^3y^3 + 2x^2y = C$)

Ejercicio 3. $2xy \ln y\, dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\, dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x, y) = x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C$)

Ejercicio 4. $(2wz^2 - 2z)\, dw + (3w^2z - 4w)\, dz = 0$.
(**Rta.:** $w^2z^3 - 2z^2w = C$)

Ejercicio 5. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0$
(**Rta.:** $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + y^2 = C$)

Ejercicio 6. $x\, dy + y\, dx = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(dx + dy)$.
(**Rta.:** $xy = \frac{1}{4}(x+y)^4 + C$)

Ejercicio 7. $x\,dy - y\,dx = (2x^2+3y^2)^3(2xdx+3ydy)$.
(**Rta.:** $\sqrt{\frac{2}{3}}\tan^{-1}(\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{y}{x}) = \frac{1}{3}(2x^2+3y^2)^3 + C$)

Ejercicio 8. $y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0$.
(**Rta.:** $y^2x - y^2e^y + 2ye^y - 2e^y = C$)

Ejercicio 9. $(xy-1)dx + (x^2-xy)dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = xy - \ln|x| - \frac{y^2}{2} = C$)

Ejercicio 10. $ydx + (x^2y - x)dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C$)

Ejercicio 11. $(2xy - e^{-2x})dx + xdy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = ye^{2x} - \ln|x| = C$)

Ejercicio 12. $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = xe^{2y} - \ln|y| = C$)

Ejercicio 13. $(x+y)dx + x\ln x dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = x + y\ln x = C$)

Ejercicio 14. Hallar la solución particular que pasa por el punto $y(1) = -2$, de la E.D.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}$$

(**Rta.:** $x^3y^2 + y^3x = -4$)

Ejercicio 15. $x\,dx + y\,dy = 3\sqrt{x^2+y^2}\ y^2\,dy$.
(**Rta.:** $\sqrt{x^2+y^2} = y^3 + C$)

Ejercicio 16. $4y\,dx + x\,dy = xy^2\,dx$.
(**Rta.:** $\frac{1}{yx^4} - \frac{1}{3x^3} = C$)

Ejercicio 17. Si

$$\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = R(xy),$$

entonces $\mu = F.I. = e^{\int^t R(s)\,ds}$, donde $t = xy$

Ejercicio 18. Bajo que condiciones $Mdx + Ndy = 0$ tendrá un F.I.$= \mu(x + y)$

Ejercicio 19. Si $Mdx + Ndy = 0$ es homogénea, entonces $\mu(x, y) = \frac{1}{xM+yN}$

2.6. E.D. LINEAL DE PRIMER ORDEN

Definición 2.6. *Una E.D. de la forma:*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x),$$

donde $a_1(x) \neq 0$, en I y $a_1(x), a_0(x), h(x)$ son continuas en I, se le llama E.D. lineal en y de primer orden.

Dividiendo por $a_1(x)$, se obtiene la llamada ecuación en forma canónica ó forma estandar:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x),$$

donde $p(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ y $Q(x) = \dfrac{h(x)}{a_1(x)}$.

Teorema 2.3 (Teorema de la E.D. lineal de primer orden).

La solución general de la E.D. lineal en y, de primer orden:

$$y' + p(x)y = Q(x)$$

es :

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int e^{\int p(x)\,dx}Q(x)\,dx + C.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + p(x)y &= Q(x) \qquad (2.9)\\ &\Rightarrow p(x)y\,dx + dy = Q(x)\,dx \end{aligned}$$

o sea que $(p(x)y - Q(x))\,dx + dy = 0$, como $\frac{\partial M}{\partial y} = p(x)$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$, entonces

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$$

y por tanto $\mu = e^{\int p(x)\,dx} = F.I.$; multiplicando (2.9) por el $F.I.$:

$$e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + p(x)ye^{\int p(x)\,dx} = Q(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

o sea $\frac{d}{dx}(ye^{\int p(x)\,dx}) = Q(x)e^{\int p(x)\,dx}$ e integrando con respecto a x se tiene:

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C \qquad \blacksquare$$

Obsérvese que la expresión anterior es lo mismo que:

$$y\,F.I. = \int Q(x)\,F.I.\,dx + C$$

Ejemplo 10. Hallar la solución general de la E.D.:$(6 - 2\mu\nu)\frac{d\nu}{d\mu} + \nu^2 = 0$

Solución:

$$\frac{d\nu}{d\mu} = -\frac{\nu^2}{6 - 2\mu\nu}$$

$$\frac{d\mu}{d\nu} = -\frac{6}{\nu^2} + \frac{2\mu}{\nu}$$

$$\frac{d\mu}{d\nu} - \frac{2\mu}{\nu} = -\frac{6}{\nu^2}$$

que es lineal en μ con

$$p(\nu) = -\frac{2}{\nu}, Q(\nu) = -\frac{6}{\nu^2}$$

$$F.I. = e^{\int p(\nu)d\nu} = e^{\int -\frac{2}{\nu}d\nu} = e^{-2\ln|\nu|} = e^{\ln|\nu|^{-2}} = \nu^{-2} = \frac{1}{\nu^2}$$

La solución general es

$$\frac{1}{\nu^2}\mu = \int \frac{1}{\nu^2}(-\frac{6}{\nu^2})d\nu + C$$

$$\frac{1}{\nu^2}\mu = -6\int \nu^{-4} d\nu + C = -6\frac{\nu^{-3}}{-3} + C$$

$$\frac{\mu}{\nu^2} = \frac{2}{\nu^3} + C \Rightarrow \mu = \frac{2}{\nu} + C\nu^2$$

que es la solución general.

Ejemplo 11. Hallar una solución continua de la E.D.: $\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$

donde $f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \leq x < 1 \\ 0\,, & x \geq 1 \end{cases}$

y $y(0) = 2$

Solución:

$$F.I. : e^{\int 2x dx} = e^{x^2} \Rightarrow e^{x^2} y = \int e^{x^2} f(x) dx + C$$

a). si $0 \leq x < 1 : e^{x^2} y = \int e^{x^2} x\, dx + C$
$e^{x^2} y = \frac{1}{2}\int e^{x^2} 2x\, dx + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, que es la solución general. Hallemos C con la condición incial
$y(0) = 2 \Rightarrow e^{0^2} 2 = \frac{1}{2}e^{0^2} + C \quad \Rightarrow C = \frac{3}{2}$
luego $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}$, solución particular.

b). si $x \geq 1 : F.I. y = \int F.I.\, 0\, dx + C$
$e^{x^2} y = 0 + C \Rightarrow y = Ce^{-x^2}$

Solución general: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2} & 0 \leq x < 1 \\ Ce^{-x^2} & x \geq 1 \end{cases}$

Busquemos C, de tal manera que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$. Por tanto

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}\right) = f(1) = y(1)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-1} = Ce^{-1}, \quad \Rightarrow C = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-1}}{e^{-1}} = \frac{1}{2}e + \frac{3}{2}$$

Ejemplo 12. Con un cambio de variable adecuado transformar la E.D.:

$$y' + x \operatorname{sen} 2y = xe^{-x^2} \cos^2 y$$

en una E.D. lineal de primer orden y luego resolverla.
Solución. Lo trabajamos mediante cambios de variable.
Dividiendo por $\cos^2 y$:

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} + \frac{x(2 \operatorname{sen} y \cos y)}{\cos^2 y} = xe^{-x^2}$$

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = xe^{-x^2}$$

hagamos el siguiente cambio de variable: $t = \tan y$, por lo tanto

$$\frac{dt}{dx} = \sec^2 y \frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo

$$\frac{dt}{dx} + 2xt = xe^{-x^2}, \quad \text{es lineal en t con}$$

$$p(x) = 2x, \qquad Q(x) = xe^{-x^2}$$

$$F.I. = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

Resolviéndola

$$t\,F.I. = \int F.I.Q(x)\,dx + C$$

$$te^{x^2} = \int e^{x^2}(xe^{-x^2})\,dx + C$$

$$\Rightarrow \tan y\, e^{x^2} = \frac{x^2}{2} + C$$

Ejercicio 1. Hallar una solución continua de la E.D.:

$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$

donde $f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \leq x < 1 \\ -x\,, & x \geq 1 \end{cases}$

con $y(0) = 0$.

(**Rta.:** $y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2(1+x^2)}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{1+x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$)

Ejercicio 2. Hallar la solución de la E.D.: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$ con $y(5) = 2$
(**Rta.:** $xy = \frac{y^2}{2} + 8$)

Ejercicio 3. Resolver para $\varphi(x)$ la ecuación $\int_0^1 \varphi(\alpha x)\, d\alpha = n\varphi(x)$
(Ayuda: con un cambio de variable adecuado transforme la ecuación en una E.D. lineal de primer orden.)
(**Rta.:** $\varphi(x) = Cx^{(\frac{1-n}{n})}$)

Ejercicio 4. Hallar la solución de la E.D.: $y' - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$ donde y es acotada cuando $x \to \infty$.
(**Rta.:** $y = \operatorname{sen} x$)

Ejercicio 5. Hallar la solución de la E.D.: $2\sqrt{x}\, y' - y = -\operatorname{sen}\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$ donde y es acotada cuando $x \to \infty$.
(**Rta.:** $y = \cos\sqrt{x}$)

Ejercicio 6. Resolver la E.D.: $(x+2)^2\, \frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$.
(**Rta.:** $y(2+x)^4 = \frac{5}{3}(2+x)^3 + C$)

Ejercicio 7. Resolver la E.D.: $y - x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\, y^2 e^y$.
(**Rta.:** $\frac{x}{y} = e^y + C$)

Ejercicio 8. El suministro de glucosa al torrente sanguíneo es una técnica importante para detectar la diabetes en una persona. Para estudiar este proceso, definimos $G(t)$ como la cantidad de glucosa presente en la sangre de un paciente en el tiempo t. Suponga que la glucosa se suministra al sistema sanguíneo a una tasa constante $k\frac{gr.}{min.}$. Al mismo tiempo la glucosa se transforma y se separa de la sangre a una tasa proporcional a la cantidad de glucosa presente. Construir la E.D. y resolverla. Hallar $G(t)$ cuando $t \to \infty$.

Ejercicio 9. Hallar la solución general en términos de $f(x)$, de la E.D.:

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{f'(x)}{f(x)}\, y = f'(x)$$

(**Rta.:** $y = \frac{1}{3}f(x) + \frac{C}{[f(x)]^2}$)

Ejercicio 10. Hallar la solución general de la E.D.

$$(x+1)y' + (2x-1)y = e^{-2x}$$

(**Rta.:** $y = -\frac{1}{3}e^{-2x} + Ce^{-2x}(x+1)^3$)

Ejercicio 11. Hallar la solución particular de la E.D.

$$y' + y = 2xe^{-x} + x^2 \text{si } \ y(0) = 5$$

(**Rta.:** $y = x^2e^{-x} + x^2 - 2x + 2 + 3e^{-x}$)

Ejercicio 12. Hallar la solución particular de la E.D.

$$(1 - 2xy^2)dy = y^3 dx$$

si $y(0) = 1$
(**Rta.:** $xy^2 = \ln y$)

2.7. ECUACION DIFERENCIAL DE BERNOULLI

Definición 2.7. *Una E.D. de la forma* $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n$ *con* $n \neq 0$ *y* $n \neq 1$*, se le llama una E.D. de Bernoulli. Obsérvese que es una E.D. no lineal.*

La sustitución $w = y^{1-n}$ convierte la E.D. de Bernoulli en una E.D. lineal en w de primer orden:

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)p(x)w = (1-n)\,Q(x).$$

Ejemplo 13. $xy(1 + xy^2)\frac{dy}{dx} = 1$ con $y(1) = 0$.
Solución:
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy\,(1+xy^2)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dy} = xy\,(1 + xy^2) = xy + x^2y^3$

$$\frac{dx}{dy} - xy = x^2y^3 \tag{2.10}$$

tiene la forma de Bernoulli con variable dependiente x, con $n = 2$
Hagamos $w = x^{1-2} = x^{-1} \Rightarrow x = w^{-1}$

$$\frac{dx}{dy} = -w^{-2}\frac{dw}{dy}$$

sustituimos en (2.10): $-w^{-2}\frac{dw}{dy} - yw^{-1} = y^3 w^{-2}$
multiplicamos por $-w^2$: $\frac{dw}{dy} + yw = -y^3$, lineal en w de primer orden.
luego $p(y) = y$; $Q(y) = -y^3$

$$F.I. = e^{\int P(y)\,dy} = e^{\int y\,dy} = e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$w\,F.I. = \int F.I.\,Q(y)\,dy + C$$

$$w\,e^{\frac{y^2}{2}} = \int e^{\frac{y^2}{2}}(-y^3)\,dy + C$$

hagamos: $u = \frac{y^2}{2} \Rightarrow du = y\,dy$, $y^2 = 2u$

$$w\,e^{\frac{y^2}{2}} = -\int y^3 e^{\frac{y^2}{2}}\,dy + C = -2\int ue^u\,du + C$$

e integrando por partes, obtenemos: $w\,e^{\frac{y^2}{2}} = -2u\,e^u + 2e^u + C$

$$x^{-1}e^{\frac{y^2}{2}} = -y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + C \Rightarrow \frac{1}{x} = -y^2 + 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$$

Como $y(1) = 0$ entonces $C = -1$, por lo tanto la solución particular es:

$$\frac{1}{x} = -y^2 + 2 - e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Resolver las E.D. de los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$ con $y(1) = 1$.
(**Rta.:** $y^3 = -3x^2 + 4x^{\frac{3}{2}}$)

Ejercicio 2. $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$.
(**Rta.:** $x^3 = -y - 2 + Ce^y$)

Ejercicio 3. $tx^2\frac{dx}{dt} + x^3 = t\cos t$.
(**Rta.:** $x^3t^3 = 3(3(t^2-2)\cos t + t(t^2-6)\operatorname{sen} t) + C$)

Ejercicio 4. $y' = \frac{x}{x^2y+y^3}$.
(**Rta.:** $x^2 + y^2 + 1 = Ce^{y^2}$)

Ejercicio 5. $xy' + y = x^4y^3$.
(**Rta.:** $y^{-2} = -x^4 + cx^2$)

Ejercicio 6. $xy^2y' + y^3 = \frac{\cos x}{x}$.
(**Rta.:** $x^3y^3 = 3x \operatorname{sen} x + 3\cos x + C$)

Ejercicio 7. $x^2y' - y^3 + 2xy = 0$.
(**Rta.:** $y^{-2} = \frac{2}{5x} + Cx^4$)

Ejercicio 8. Hallar la solución particular de la E.D.

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = \sqrt{y}(\frac{x}{y^2})^{\frac{3}{2}}$$

tal que $y(1) = 1$
(**Rta.:** $y^3 = x$)

Ejercicio 9. Hallar $y(x)$ en función de $f(x)$ si

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\, y = f(x)y^2$$

(**Rta.:** $y = \frac{1}{(1-Ce^{\int f(x)\, dx})}$)

2.8. E.D. NO LINEALES DE PRIMER ORDEN

Sea

$$(y')^n + a_1\,(x,y)(y')^{n-1} + a_2\,(x,y)(y')^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0,$$

donde $a_i\,(x,y)$ para $i = 1 \ldots n$ son funciones reales y continuas en una región R del plano XY.
Casos:

i) Se puede despejar y'.

ii) Se puede despejar y.

iii) Se puede despejar x.

Caso i). Si hacemos $p = \frac{dy}{dx} = y'$, entonces

$$p^n + a_1(x,y)p^{n-1} + a_2(x,y)p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(x,y)p + a_n(x,y) = 0.$$

En caso que sea posible que la ecuación anterior se pueda factorizar en factores lineales de p, se obtiene lo siguiente:

$$(p - f_1(x,y))(p - f_2(x,y)) \ldots (p - f_n(x,y)) = 0,$$

donde $f_i(x,y)$ para $i = 1, \ldots, n$ son funciones reales e integrables en una región R del plano XY.

Si cada factor tiene una solución $\varphi_i(x,y,c) = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. entonces la solución general es $\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x,y,c) = 0$.

Ejemplo 14. $(y' - \operatorname{sen} x)((y')^2 + (2x - \ln x)y' - 2x \ln x) = 0$.
<u>Solución:</u>

$$(p - \operatorname{sen} x)(p^2 + (2x - \ln x)p - 2x \ln x) = 0$$

$$(p - \operatorname{sen} x)(p + 2x)(p - \ln x) = 0$$

Para el factor $p - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow dy = \operatorname{sen} x\, dx \Rightarrow$ $y = -\cos x + C$

$$\phi_1(x,y,C) = 0 = y + \cos x - C$$

Para el factor $p + 2x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow dy = -2x\, dx$

$$\Rightarrow y = -x^2 + C \Rightarrow \phi_2(x,y,C) = 0 = y + x^2 - C$$

Para el factor $p - \ln x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln x \Rightarrow dy = \ln x\, dx$

$$y = \int \ln x\, dx + C,$$

e integrando por partes:

$$y = \int \ln x\, dx + C = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x + C$$

$$\phi_3(x, y, C) = 0 = y - x\ln x + x - C$$

La solución general es: $\prod_{i=1}^{3} \phi_i(x, y, C) = 0$

$$(y + \cos x - C)(y + x^2 - C)(y - x\ln x + x - C) = 0$$

Resolver por el método anterior los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $p\,(p^2 - 2xp - 3x^2) = 0$.
(**Rta.:** $(y - c)(2y - 3x^2 + c)(2y + x^2 + c) = 0$)

Ejercicio 2. $6\mu^2 \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^2 - 13\mu\nu\frac{d\nu}{d\mu} - 5\nu^2 = 0$.
(**Rta.:** $(\nu\mu^{\frac{1}{3}} - c)(\nu\mu^{-\frac{5}{2}} - c) = 0$)

Ejercicio 3. $(y')^3 - y(y')^2 - x^2y' + x^2y = 0$.
(**Rta.:** $(x - \ln|y| + c)(y + \frac{x^2}{2} - c)(y - \frac{x^2}{2} - c) = 0$)

Ejercicio 4. $n^2p^2 - x^{2n} = 0$, con $n \neq 0$ y $\frac{dy}{dx} = p = y'$.
(**Rta.:** $(y + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - c)(y - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - c) = 0$)

Ejercicio 5. $x^2(y')^2 + 2xyy' + y^2 = xy$

Ejercicio 6. Denotando por P cualquier punto sobre una curva C y T el punto de intersección de la tangente con el eje Y. Hallar la ecuación de C si $\overline{PT} = k$.
(**Rta.:**$(y + c)^2 = \left[\sqrt{k^2 - x^2} + k\ln\left|\frac{\sqrt{k^2-x^2}-k}{x}\right|\right]^2$, con $|x| \leq k, k > 0$.)

Caso ii). Son ecuaciones de la forma $F(x, y, p) = 0$ y de la cual puede despejarse y, es decir: $y = f(x, p)$, donde x y p se consideran como variables independientes, la diferencial total es:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial p}\,dp$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

o sea que

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = g(x,p,p'), \text{ donde } p' = \frac{dp}{dx}$$

y por tanto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) dx + \frac{\partial f}{\partial p}\, dp = 0$$

es una E.D. de primer orden en x y p. Generalmente (teniendo buena suerte)

$$g(x,p,p') = 0$$

se puede factorizar, quedando así: $g(x,p,p') = h(x,p,p')\,\phi\,(x,p) = 0$.

a) Con el factor $h(x,p,p') = 0$ se obtiene una solución $h_1(x,p,c) = 0$, se elimina p entre $h_1(x,p,c) = 0$ y $F(x,y,p) = 0$ y se obtiene la solución general.

b) Con $\phi(x,p) = 0$ se obtiene una solución singular, al eliminar p entre $\phi(x,p) = 0$ y $F(x,y,p) = 0$.

Ejemplo 15. $y = f(x,p) = (px+x^2)\ln x + (px+x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$, donde $p = \frac{dy}{dx}$

Solución: $\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$
si $x \neq 0$

$$p = (p+2x)\ln x + (px+x^2)\frac{1}{x} + 2(px+x^2)(p+2x) - x + [x\ln x + 2(px+x^2)x]\frac{dp}{dx}$$

$$p = (p+2x)\ln x + p + x + 2x(p+x)(p+2x) - x + [x\ln x + 2x^2(p+x)]\frac{dp}{dx}$$

$$0 = (p+2x)\ln x + 2x(p+x)(p+2x) + [x\ln x + 2x^2(p+x)]\frac{dp}{dx}$$

$$0 = (p+2x)[\ln x + 2x(p+x)] + x[\ln x + 2x(p+x)]\frac{dp}{dx}$$

$$0 = [\ln x + 2x(p+x)]\left[p + 2x + x\frac{dp}{dx}\right]$$

$$0 = h(x,p), \Phi(x,p,p')$$

1) Con el factor $\Phi(x,p,p') = p + 2x + x\frac{dp}{dx} = 0$

$\Rightarrow x\frac{dp}{dx} + p = -2x \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = -2$ (dividimos por x)

E.D.lineal en p, $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = -2$

$F.I. = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = x$

$p\,F.I. = \int F.I.Q(x)\,dx + C$

$px = \int x(-2)\,dx + C = -\frac{2x^2}{2} + C = -x^2 + C$

$p = -x + \frac{C}{x}$ (dividimos por x)

luego sustituimos en la E.D. original:

$$y = (px + x^2)\ln x + (px + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = (-x^2 + C + x^2)\ln x + (-x^2 + C + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$$

solución general

$$y = C\ln x + C^2 - \frac{x^2}{2}$$

2) $h(x,p) = \ln x + 2x(p + x) = 0$

$$0 = \ln x + 2xp + 2x^2$$

$$2xp = -\ln x - 2x^2$$

luego $p = -\frac{\ln x - 2x^2}{2x} \Rightarrow px = -\frac{\ln x + 2x^2}{2}$

sustituyo en la E.D. original:

$$y = (px + x^2)\ln x + (px + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = \left(-\frac{\ln x + 2x^2}{2} + x^2\right)\ln x + \left(-\frac{\ln x + 2x^2}{2} + x^2\right)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = \left(\frac{-\ln x - 2x^2 + 2x^2}{2}\right) \ln x + \left(\frac{-\ln x - 2x^2 + 2x^2}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = -\frac{\ln^2 x}{2} + \frac{\ln^2 x}{4} - \frac{x^2}{2}$$

luego la solución singular es

$$y = -\frac{\ln^2 x}{4} - \frac{x^2}{2}$$

Resolver por el método anterior los siguientes ejercicios, donde $p = \frac{dy}{dx}$:

Ejercicio 1. $xp^2 - 2yp + 3x = 0$.
(**Rta.:** $2cy = c^2x^2 + 3, \quad y^2 = 3x^2$)

Ejercicio 2. $y = px \ln x + p^2x^2$.
(**Rta.:** $y = c \ln x + c^2, \quad y = -\frac{1}{4} \ln^2 x$)

Ejercicio 3. $y = 5xp + 5x^2 + p^2$.
(**Rta.:** $y = cx - x^2 + c^2, \quad 4y + 5x^2 = 0$)

Ejercicio 4. $p^2x^4 = y + px$.
(**Rta.:** $y = c^2 - cx^{-1}, \quad y = -\frac{1}{4x^2}$)

Ejercicio 5. $2y = 8xp + 4x^2 + 3p^2$.
(**Rta.:** $2y = 3(c - x)^2 + 8(c - x)x + 4x^2, \quad y = -\frac{2x^2}{3}$)

Ejercicio 6. $y = xp - \frac{1}{3}p^3$.
(**Rta.:** $y = cx - \frac{1}{3}c^3, \quad y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$)

Caso iii). Si en la ecuación $F(x, y, p) = 0$, se puede despejar $x = g(y, p)$ con y y p como variables independientes; hacemos $\frac{dy}{dx} = p$, o sea que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ y como

$$dx = \frac{\partial g}{\partial y}\, dy + \frac{\partial g}{\partial p}\, dp$$

luego

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{dp}{dy}$$

por tanto
$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{dp}{dy}=0=h(y,p,p')$$
donde $p'=\frac{dp}{dy}$.

Ejemplo 16. $\cos^2\beta\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^3-2\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}+2\tan\beta=0$

<u>Solución</u>: con $p=\frac{d\beta}{d\alpha}$, se tiene:

$$\alpha=\frac{\cos^2\beta\,p^3+2\tan\beta}{2p}$$
$$\alpha=\frac{\cos^2\beta\,p^2}{2}+\frac{\tan\beta}{p}=g(\beta,p)$$
$$\frac{1}{p}=\frac{\partial g}{\partial\beta}+\frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\beta}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{p}=-\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta\,p^2+\frac{\sec^2\beta}{p}+\left[p\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p^2}\right]\frac{dp}{d\beta}$$
Teniendo en cuenta la identidad: $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$;
$$\frac{1}{p}=-\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta\,p^2+\frac{1}{p}+\frac{\tan^2\beta}{p}+\left[p\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p^2}\right]\frac{dp}{d\beta}$$
$$0=-\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta\,p^2+\frac{\tan^2\beta}{p}+\left[p\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p^2}\right]\frac{dp}{d\beta}$$
$$0=-\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta\,p^2+\frac{\tan^2\beta}{p}+\frac{1}{p}\left[p^2\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p}\right]\frac{dp}{d\beta}$$
$$0=\tan\beta\left[\frac{-\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta\,p^2}{\tan\beta}+\frac{\tan\beta}{p}\right]+\frac{1}{p}\left[p^2\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p}\right]\frac{dp}{d\beta}$$
$$0=-\tan\beta\left[\cos^2\beta\,p^2-\frac{\tan\beta}{p}\right]+\frac{1}{p}\left[p^2\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p}\right]\frac{dp}{d\beta}$$
$$0=\left[\cos^2\beta\,p^2-\frac{\tan\beta}{p}\right]\left[-\tan\beta+\frac{1}{p}\frac{dp}{d\beta}\right]$$
$$0=h(\beta,p)\;\phi(\beta,p,p'),\qquad\text{donde }\;p=\frac{d\beta}{d\alpha}\;\text{ y }\;p'=\frac{dp}{d\beta}$$

$$① : \; \phi(\beta, p, p') = -\tan\beta + \frac{1}{p}\frac{dp}{d\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}\frac{dp}{d\beta} = \tan\beta \Rightarrow \frac{dp}{p} = \tan\beta\, d\beta$$

$$\Rightarrow \ln|p| = -\ln|\cos\beta| + \ln|C|$$

$$\ln|p| = \ln\frac{|c|}{|\cos\beta|} \Rightarrow p = \frac{c}{\cos\beta}, \quad \text{donde } \cos\beta \neq 0$$

Sustituyendo en el la E.D. original:

$$\cos^2\beta\, p^3 - 2\alpha\, p + 2\tan\beta = 0$$

$$\cos^2\beta\, \frac{c^3}{\cos^3\beta} - 2\alpha\, \frac{c}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\frac{c^3}{\cos\beta} - 2\alpha\, \frac{c}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\frac{c^3}{\cos\beta} + 2\tan\beta}{2\,\frac{c}{\cos\beta}} = \frac{\frac{c^3}{\cos\beta} + \frac{2\,\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{2\,\frac{c}{\cos\beta}}$$

La solución general es :

$$= \frac{c^3 + 2\operatorname{sen}\beta}{2c} = \frac{c^2}{2} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{c}; \quad c \neq 0$$

$$② : \; h(\beta, p) = 0 = \cos^2\beta\, p^2 - \frac{\tan\beta}{p}$$

$$\cos^2\beta\, p^2 = \frac{\tan\beta}{p} \Rightarrow p^3 = \frac{\tan\beta}{\cos^2\beta}$$

$$p = \sqrt[3]{\frac{\tan\beta}{\cos^2\beta}} = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos^3\beta}}$$

$$p = \frac{1}{\cos\beta}\sqrt[3]{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow p = \frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}$$

Y sustituyo en la E.D.O. original:

$$\cos^2\beta \left(\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}\right)^3 - 2\alpha\,\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\cos^2\beta\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos^3\beta}-2\alpha\,\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}+2\tan\beta=0$$

$$\tan\beta-2\alpha\,\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}+2\tan\beta=0$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{3\tan\beta}{\frac{2\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}}=\frac{3}{2}\frac{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}}=\frac{3}{2}\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}}\beta$$

Siendo esta última la solución singular.

Resolver por el método anterior los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $x=y+\ln p$
(**Rta.:** $x=y+\ln|1+\frac{C}{e^y}|$)

Ejercicio 2. $4p^2=25x$
(**Rta.:** $(3y+c)^2=25x^3$)

Ejercicio 3. $2px=2\tan y+p^3\cos^2 y$
(**Rta.:** $x=\frac{\operatorname{sen} y}{c}+\frac{c^2}{2},\quad 8x^3=27\operatorname{sen}^2 y$)

Ejercicio 4. $4px-2y=p^3y^2$
(**Rta.:** $4c\frac{x}{y}-2y=\frac{c^3}{y};\ 4x=3y^{\frac{4}{3}}$)

Ecuación de Clairaut: $y=xy'+f(y')$
Por el método del caso ii) se muestra que su solución general es de la forma: $y=cx+f(c)$
Y su solución singular se consigue eliminando p entre las ecuaciones $x+f'(p)=0$ y $y=xp+f(p)$

Ejercicio 5. $y=xy'-\frac{(y')^3}{3}$
(**Rta.:** $y=cx-\frac{1}{3}c^3,\quad y=\pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$)

Ejercicio 6. $y=xy'+1-\ln y'$
(**Rta.:** $y=cx+1-\ln c,\quad y=2+\ln x$)

Ejercicio 7. $xy'-y=e^{y'}$
(**Rta.:** $y=cx-e^c,\quad y=x\ln x-x$)

Ejercicio 8. $(y - px)^2 = 4p$

Ejercicio 9. $y^2(y')^3 - 4xy' + 2y = 0$

2.9. OTRAS SUSTITUCIONES

Ejemplo 17. $y\,dx + (1 + ye^x)\,dy = 0$

Solución:

Hagamos

$$u = 1 + ye^x \Rightarrow y = \frac{u-1}{e^x}, \quad du = ye^x\,dx + e^x\,dy = e^x(y\,dx + dy),$$

$$\Rightarrow du = (u-1)\,dx + e^x\,dy$$

$$\Rightarrow dy = \frac{du - (u-1)\,dx}{e^x}$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$\frac{u-1}{e^x}dx + u\left(\frac{du - (u-1)\,dx}{e^x}\right) \overset{e^x>0}{=} 0$$

$$(u - 1 - u(u-1))\,dx + u\,du = 0$$

$$(u-1)(1-u)\,dx + u\,du = 0$$

$$-(u-1)^2\,dx + u\,du = 0$$

$$dx = \frac{u}{(u-1)^2}\,du$$

$$x = \int \frac{u}{(u-1)^2}\,du + C$$

Utilicemos fracciones parciales para resolver la integral

$$\frac{u}{(u-1)^2} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2}$$

$$u = A(u-1) + B$$

$$\text{si } \; u = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$\text{si } \; u = 0 \Rightarrow 0 = -A + 1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = \int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} \right) du$$

$$x = \ln|u-1| + \int \frac{dv}{v^2}, \quad \text{haciendo } \; v = u - 1 \Rightarrow dv = du$$

$$\text{entonces } \; x = \ln|u-1| - \frac{1}{v} + C$$

$$x = \ln|ye^x| - \frac{1}{ye^x} + C, \quad \text{es la solución general}$$

Ejemplo 18. $y'' + 2y(y')^3 = 0$.
Solución:

$$\text{Hagamos } \; p = y' = \frac{dy}{dx}, \quad \Rightarrow p' = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$p' + 2yp^3 = 0$$

$$\frac{dp}{dx} + 2yp^3 = 0$$

Por la regla de la cadena sabemos que: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = p\frac{dp}{dy}$, entonces

$$p\,\frac{dp}{dy} + 2yp^3 = 0, \quad \text{con } \; p \neq 0$$

$$\frac{dp}{dy} + 2yp^2 = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = -2yp^2 \Rightarrow p^{-2}dp = -2y\,dy$$

$$\Rightarrow -p^{-1} = -y^2 + C$$

$$p^{-1} = y^2 + C_1 \Rightarrow p = \frac{1}{y^2 + C_1} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow dx = (y^2 + C_1)\,dy$$

$$x = \frac{y^3}{3} + C_1 y + C_2$$

Hacer una sustitución adecuada para resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $xe^{2y}\frac{dy}{dx} + e^{2y} = \frac{\ln x}{x}$
(**Rta.:** $x^2e^{2y} = 2x\ln x - 2x + c$)

Ejercicio 2. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x}y = 2x^5 e^{\frac{y}{x^4}}$
(**Rta.:** $-e^{-\frac{y}{x^4}} = x^2 + c$)

Ejercicio 3. $2yy' + x^2 + y^2 + x = 0$
(**Rta.:** $x^2 + y^2 = x - 1 + ce^{-x}$)

Ejercicio 4. $y^2y'' = y'$
(**Rta.:**$\frac{y}{c} + \frac{1}{c^2}\ln|cy - 1| = x + c_1, y = k$)

Ejercicio 5. $2x\csc 2y\frac{dy}{dx} = 2x - \ln(\tan y)$
(**Rta.:** $\ln(\tan y) = x + cx^{-1}$)

Ejercicio 6. $y'' + (\tan x)y' = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2$)

Ejercicio 7. $y' + 1 = e^{-(x+y)}\operatorname{sen} x$
(**Rta.:** $e^y = -e^{-x}\cos x + ce^{-x}$)

Ejercicio 8. $\frac{dy}{dx} + xy^3\sec\frac{1}{y^2} = 0$
(**Rta.:** $x^2 - \operatorname{sen}\frac{1}{y^2} = c$)

Ejercicio 9. $dy - y\operatorname{sen} x\; dx = y\ln(ye^{\cos x})\; dx$
(**Rta.:** $\ln(\ln|ye^{\cos x}|) = x + C$)

Ejercicio 10. $yy' + xy^2 - x = 0$
(**Rta.:** $y^2 = 1 + Ce^{-x^2}$)

Ejercicio 11. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$
(**Rta.:** $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$)

Ejercicio 12. $x^2y'' - 2xy' - (y')^2 = 0$
(**Rta.:** $\frac{x^2}{2} + Cx + C^2\ln|C - x| = -y + C_1$)

Ejercicio 13. $yy'' - y^2y' - (y')^2 = 0$
(**Rta.:** $\frac{1}{C}\ln|\frac{y}{y+C}| = x + C_1$)

Ejercicio 14. $\frac{dy}{dx} + e^{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x}$
(**Rta.:** $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$)

Ejercicio 15. $\frac{dy}{dx} = \cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$
(**Rta.:** $\sec\frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} = Cx$)

Ejercicio 16. La E.D.

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

se le llama ecuación de Ricatti. Suponiendo que se conoce una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación, entonces demostrar que la sustitución $y = y_1 + \frac{1}{u}$, transforma la ecuación de Ricatti en la E.D. lineal en u de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + (B(x) + 2A(x)y_1)u = -A(x)$$

Hallar la solución: a) $y' + y^2 = 1 + x^2$, b) $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$
(**Rta.:** b) $y = x + (C - x)^{-1}$)

2.10. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Como con el paquete matemático Maple se pueden resolver Ecuaciones Diferenciales, expondremos a continuación varios ejemplos, los cuales solucionaremos utilizando dicho paquete. Las instrucciones en Maple terminan con punto y coma, después de la cual se da “enter”para efectuar la operación que se busca.

Ejemplo 19. Hallar la solución general de la E.D. $\frac{dy}{dx} = 3\frac{y}{x}$

```
>int(1/y,y)=int(3/x,x)+C;
                         ln(y) = 3 ln(x) + C
>solve(ln(y) = 3*ln(x)+C,y);

                                        2
                              exp(C) x
```

Ejemplo 20. Hallar la solución particular de la E.D. $\frac{dy}{dx} = xy(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, con la condición inicial $y(1) = 1$

```
> restart;

> diff_eq1 := D(y)(x)=x*y(x)^3*(1+x^2)^(-1/2);
```

`diff_eq1` $:= D(y)(x) = \frac{xy(x)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$

```
> init_con := y(0)=1;
```

`init_con` $:= y(0) = 1$

```
> dsolve( {diff_eq1, init_con} , {y(x)} );
```

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{-2\sqrt{1+x^2}+3}}$$

Ejemplo 21. Mostrar que la E.D. $(2xy^2 + ye^x)dx + (2x^2y + e^x - 1)dy = 0$ es exacta y hallar la solución general.

```
> M:=2*x*y^2+y*exp(x);
```

`M:=` $4xy + e^x$

```
> N:=2*x^2*y+exp(x)-1;
```

`N:=`$2x^2y + e^x - 1$

```
> diff_E1:=2*x*(y^2)(x)+y(x)*exp(x)+(2*x^2*y(x)+exp(x)-1)*D(y)(x)=0;
```

`diff_E1` $:= 2xy(x)^2 + y(x)e^x + (2x^2y(x) + e^x - 1)D(y)(x) = 0$

```
> dsolve(diff_E1,y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{1 - e^x - \sqrt{(e^x)^2 - 2e^x + 1 - 4x^2C1}}{x^2},$$
$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{1 - e^x + \sqrt{(e^x)^2 - 2e^x + 1 - 4x^2C1}}{x^2}$$