
CAPÍTULO 1

INTRODUCCION

Definición 1.1. Si una ecuación contiene las derivadas o las diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (E.D.).

Si la ecuación contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente entonces la ecuación se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.).

Ejemplo 1. $3\frac{dy}{dx} + 4y = 5$

Ejemplo 2. $(x^2 - y)dx + 5 \operatorname{sen} y dy = 0$

Ejemplo 3. $u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx} = x$

Si la ecuación contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación en derivadas parciales.

Ejemplo 4. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Ejemplo 5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = y - x$

Definición 1.2. (Orden). La derivada o la diferencial de más alto orden determina el orden de la E.D.

Ejemplo 6. $\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = \ln x$, es de orden 3.

Ejemplo 7. $xdy - ydx = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, la cual es de orden 1.

Definición 1.3 (E.D.O. lineal). *Una E.D. es lineal si tiene la forma:*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Es decir, la variable dependiente y y todas sus derivadas tienen exponente uno y cada coeficiente $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), g(x)$, depende solo de x . Si no se cumple lo anterior se dice que la E.D. no es lineal.

Ejemplo 8. $x^2\frac{d^3y}{dx^3} + \cos x\frac{d^2y}{dx^2} + \sin x\frac{dy}{dx} + x^2y = e^x$ es lineal de orden 3.

Ejemplo 9. $\sin x\frac{d^3y}{dx^3} + xy^2 = 0$ no es lineal.

Ejemplo 10. $y^2\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} + xy = x$ no es lineal.

Definición 1.4. *Se dice que una función f con dominio en un intervalo I es solución a una E.D. en el intervalo I , si la función satisface la E.D. en el intervalo I .*

Ejemplo 11. $x = y \ln(cy)$ es solución de $y'(x + y) = y$

En efecto, derivando implícitamente: $1 = \frac{dy}{dx} \ln(cy) + y \frac{1}{cy} c \frac{dy}{dx}$

$$1 = \frac{dy}{dx} (\ln(cy) + 1), \text{ luego } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(cy)+1}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\frac{y \ln(cy) + y}{\ln(cy) + 1} = \frac{y(\ln(cy) + 1)}{\ln(cy) + 1} = y,$$

luego $y = y$

por tanto $x = y \ln(cy)$ es solución.

Una E.D. acompañada de unas condiciones iniciales se le llama un problema de valor inicial (P.V.I.). Con frecuencia es importante saber si un problema de valor inicial tiene solución y también deseamos saber si esta solución es única, aunque no podamos conseguir explícitamente la solución. El siguiente teorema nos responde las inquietudes que acabamos de plantear. Este teorema lo enunciamos y demostramos con más profundidad en el Apéndice al final del texto.

Teorema 1.1. (Picard)

Sea R una región rectangular en el plano XY definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R , entonces existe un intervalo I con centro en x_0 y una única función $y(x)$ definida en I que satisface el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Ejemplo 12. Para la E.D. $y' = x^2 + y^2$, se tiene que $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ son continuas en todo el plano XY , por lo tanto por cualquier punto (x_0, y_0) del plano XY pasa una y solo una solución de la E.D. anterior. Es importante anotar que para esta E.D. es imposible hallar una solución explícita; sólo con métodos numéricos se puede hallar la solución.

Ejercicio 1. Demostrar que $y = c_1 \cos 5x$ es solución de $y'' + 25y = 0$.

Ejercicio 2. Demostrar que $y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + c_1 e^{-x^2}$ es solución de $y' + 2xy = 1$.

Ejercicio 3. Demostrar que $y = x \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ es solución de $xy' = y + x \sin x$.

Ejercicio 4. Demostrar que $y = e^{-\frac{x}{2}}$ es solución de $2y' + y = 0$, también $y = 0$ es solución.

Nota: si todas las soluciones de la E.D. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ en un intervalo I pueden obtenerse de $G(x, y, C_1, \dots, C_n)$ mediante valores apropiados de C_i , entonces a G se le llama **la solución general**; una solución que no contenga los parámetros C_i se le llama **la solución particular**; una solución que no pueda obtenerse a partir de la solución general se le llama **solución singular**.

Veremos más adelante que la solución general a una E.D. lineal de orden n

tiene n parámetros. En las E.D. no lineales a veces no es posible obtener explícitamente una solución general.

Ejemplo 13. $y = Cx^4$ es solución general de $xy' - 4y = 0$.
Con $C = 1$ entonces la solución particular es $y = x^4$.

También

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \geq 0 \\ -x^4 & x < 0 \end{cases}$$

es una solución singular, porque no se puede obtener a partir de la solución general.

Ejercicio 5. Si $y' - xy^{\frac{1}{2}} = 0$, demostrar

- $y = (\frac{x^2}{4} + C)^2$ es solución general.
- Si $C = 0$ mostrar que $y = \frac{x^4}{16}$ es solución particular.
- Explicar porqué $y = 0$ es solución singular.

Ejercicio 6. Si $y' = y^2 - 1$, demostrar

- $y = \frac{1+Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}$ es solución general.
- Explicar porqué $y = -1$ es solución singular.

Ejercicio 7. Si $xy' + 1 = e^y$, comprobar que $e^{-y} - Cx = 1$ es solución general.

Ejercicio 8. Si $2xy dx + (x^2 + 2y) dy = 0$, comprobar que $x^2y + y^2 = C_1$ es solución general.

Ejercicio 9. Si $(x^2 + y^2) dx + (x^2 - xy) dy = 0$, comprobar que $C_1(x + y)^2 = xe^{\frac{y}{x}}$, es solución general.

1.1. CAMPO DE DIRECCIONES

Dada la E.D. $y' = f(x, y)$ y sabiendo que la primera derivada representa una dirección en el plano XY , podemos por lo tanto asociar a cada punto (x, y) una dirección. A este conjunto de direcciones lo llamamos el campo de direcciones o campo pendiente de la E.D. $y' = f(x, y)$. Este campo de direcciones nos permite inferir propiedades cualitativas de las soluciones, como por ejemplo si son asintóticas a una recta, si son cerradas o abiertas, etc.. Con el paquete Maple haremos un ejemplo.

Ejemplo 14. Hallar el campo de direcciones de la E.D. $y' = -2x^2 + y^2$ y cuatro curvas solución de la E.D. que pasan por los puntos $(0, 2)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ respectivamente.

```
> with(DEtools):  
DEplot (diff(y(x),x)=-2*x^2+y(x)^2,y(x),x=-2..2,color=black,  
{[0,2],[0,0],[0,1],[0,-1]},y=-2..2,linecolor=black);
```

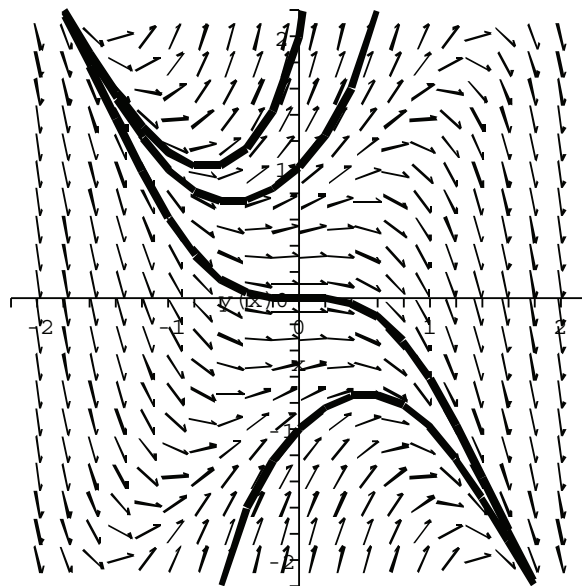


Figura 1.1

1.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Para finalizar este Capítulo, es importante hacer un corto comentario sobre la ecuación de continuidad; con ella se construyen modelos de fenómenos en diferentes áreas del conocimiento que dependen del tiempo, dando como resultado una o varias Ecuaciones Diferenciales. La ecuación de continuidad nos dice que la tasa de acumulación de una variable x en un recipiente (el cual puede ser un tanque, un órgano humano, una persona, una ciudad, un banco, una universidad, un sistema ecológico, etc.) es igual a su tasa de entrada menos su tasa de salida; tanto la tasa de entrada como la tasa de salida pueden ser constantes o variables.

Si la variable es x y la tasa de entrada es $E(t)$ y la tasa de salida es $S(t)$ entonces la tasa de acumulación es

$$\frac{dx}{dt} = E(t) - S(t).$$

Ejemplo 15. La concentración de glucosa en la sangre aumenta por ingesta de comidas ricas en azúcares, si se suministra glucosa a una razón constante R (en mg/minuto). Al mismo tiempo, la glucosa se transforma y se elimina a una tasa proporcional a la concentración presente de glucosa. Si $C(t)$ representa la concentración de glucosa en un instante t , entonces $E(t) = R$ y $S(t) = kC(t)$, entonces por la ecuación de continuidad, la Ecuación Diferencial que rige este fenómeno es

$$\frac{dC(t)}{dt} = E(t) - S(t) = R - kC(t).$$
