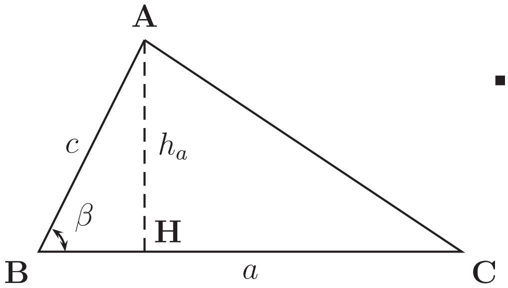
APÉNDICE A

FÓRMULAS

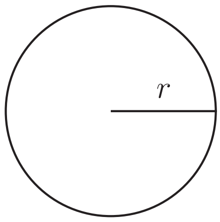
A.1. Fórmulas Aritméticas

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
- $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
- $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
- Fórmula binomial:
  $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$
  donde $\binom{n}{k} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$
- Principio de inducción: para demostrar que la afirmación S_n es cierta para todo número natural $n \geq 1$, se siguen los siguientes tres pasos:
  1. Se demuesta que S_n se cumple para $n = 1$
  2. Se toma como hipótesis que S_n se cumple para $n = k$ y luego se demuestra que se cumple para $n = k + 1$
  3. Por el principio de inducción se concluye que S_n se cumple para todo número natural n.

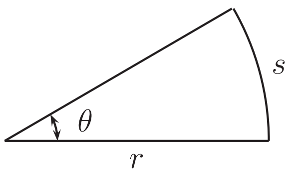
A.2. Fórmulas Geométricas



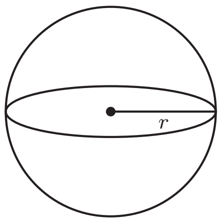
- Area del triángulo:
  $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \beta$.



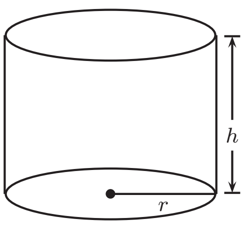
- Area del círculo:
  $A = \pi \cdot r^2$
  Longitud de la circunferencia:
  $C = 2 \cdot \pi \cdot r$



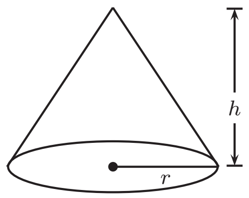
- Area del sector circular:
  $A = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \theta$
  Longitud de arco:
  $s = r \cdot \theta$



- Volumen de la esfera:
  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
  Area de la esfera:
  $A = 4 \cdot \pi \cdot r \cdot r^2$



- Volumen del cilindro circular:
  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$



- Volumen del cono circular:
  $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

- Coordenadas del punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$, donde $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:
$$(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

- Ecuación de la recta en la forma punto-pendiente, para la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y con pendiente m:
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Ecuación simplificada de la recta con pendiente m y cuya ordenada en el origen es b:
$$y = mx + b$$

- Dos rectas no verticales de pendientes m_1 y m_2 respectivamente son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$

- Dos rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente son perpendiculares si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

- Ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r:
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

- Ecuación de la elipse con centro en (h, k) y semi-ejes a y b:
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

A.3. Trigonometría

- Medición de ángulos:
  π radianes $= 180^0$, $\quad 1^0 = \frac{\pi}{180}$ rad, $\quad 1$ rad $= \frac{180^o}{\pi}$

- Funciones trigonométricas de ángulos importantes:

θ^0	θ^{rad}	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0^0	0	0	1	0
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$

- Identidades fundamentales:

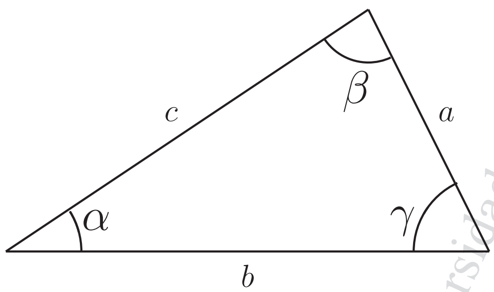
$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, $\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\quad \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, $\quad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$, $\quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, $\quad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$, $\quad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$, $\quad \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$



- Ley de senos: $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$
  Ley de cosenos:
  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

- Fórmulas con sumas y restas de ángulos:
  $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
  $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
  $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
  $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
  $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
  $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

- Fórmulas de ángulos dobles
  $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$
  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$
  $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

- Fórmulas de ángulo mitad
  $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
  $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

- Fórmulas de productos
  $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$
  $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
  $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

- Fórmulas de sumas de senos o cosenos
  $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
  $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
  $\cos\alpha - \cos\beta = 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2})\operatorname{sen}(\frac{\alpha-\beta}{2})$

A.4. Tabla de Integrales

- Formas elementales:

1. Por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$,
2. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, si $n \neq -1$,
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$,
4. $\int e^u\,du = e^u + C$,
5. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln u} + C$,
6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$,
7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$,
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$,
9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$,
10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$,
11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$,
12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$,
13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$,
14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$,
15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$,
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$,
17. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$,
18. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{u+a}{u-a}| + C$,
19. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}|\frac{u}{a}| + C$,

- Formas trigonómetricas:

  20. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$,
  21. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$,
  22. $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$,
  23. $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$,
  24. $\int \operatorname{sen}^3 u\, du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$,
  25. $\int \cos^3 u\, du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$,
  26. $\int \tan^3 u\, du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$,
  27. $\int \cot^3 u\, du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$,
  28. $\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$,
  29. $\int \csc^3 u\, du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$,
  30. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)}$, si $a^2 \neq b^2$,
  31. $\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)}$, si $a^2 \neq b^2$,
  32. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)}$, si $a^2 \neq b^2$,
  33. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$,
  34. $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$,
  35. $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du$, si $n \neq 1$
  36. $\int \cot^n u\, du = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$, si $n \neq 1$
  37. $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$, si $n \neq 1$
  38. $\int \csc^n u\, du = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du$, si $n \neq 1$
  39. $\int u \operatorname{sen} u\; du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$,
  40. $\int u \cos u\; du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$,
  41. $\int u^n \operatorname{sen} u\; du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u + C$,
  42. $\int u^n \cos u\; du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u + C$.

- Formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$:

  43. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\; du = \frac{u}{a}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C,$
  44. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\; du = \ln u + \sqrt{u^2 \pm a^2} + C,$
  45. $\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u}\; du = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}| + C,$
  46. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\; du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \sec^{-1} \frac{u}{a} + C,$
  47. $\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\; du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C,$
  48. $\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\; du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C,$

- Formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$:

  49. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\; du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C,$
  50. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\; du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}| + C,$
  51. $\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\; du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C,$
  52. $\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\; du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C,$

- Formas que contienen exponenciales y logaritmos:

  53. $\int ue^u\; du = (u-1)e^u + C,$
  54. $\int u^n e^u\; du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u\; du + C,$
  55. $\int \ln u\; du = u \ln u - u + C,$
  56. $\int u^n \ln u\; du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \ln u - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C,$
  57. $\int e^{au} \operatorname{sen} bu\; du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C,$
  58. $\int e^{au} \cos bu\; du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C,$

- Formas trigonométricas inversas:

  59. $\int \operatorname{sen}^{-1}u\; du = u \operatorname{sen}^{-1}u + \sqrt{1-u^2} + C,$
  60. $\int \tan^{-1} u\; du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C,$
  61. $\int \sec^{-1} u\; du = u \sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C,$
  62. $\int u \operatorname{sen}^{-1}u\; du = \frac{1}{4}(2u^2-1)\operatorname{sen}^{-1}u + \frac{u}{4}\sqrt{1-u^2} + C,$
  63. $\int u \tan^{-1} u\; du = \frac{1}{2}(u^2+1)\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C,$

64. $\int u \sec^{-1} u\ du = \frac{u^2}{2}\sec^{-1} u - \frac{1}{2}\sqrt{u^2-1} + C,$

65. $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\ du = \frac{u^{n+1}}{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \frac{1}{n+1}\int \frac{u^{n+1}}{\sqrt{1-u^2}}\ du + C$, si $n \neq -1$

66. $\int u^n \tan^{-1} u\ du = \frac{u^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} u - \frac{1}{n+1}\int \frac{u^{n+1}}{1+u^2}\ du + C$, si $n \neq -1$

67. $\int u^n \sec^{-1} u\ du = \frac{u^{n+1}}{n+1}\sec^{-1} u - \frac{1}{n+1}\int \frac{u^{n}}{\sqrt{u^2-1}}\ du + C$, si $n \neq -1$

- Otras formas útiles:

68. $\int \sqrt{2au-u^2}\ du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u-a}{a} + C,$

69. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u-a}{a} + C,$

70. $\int_0^\infty u^n e^{-u}\ du = \Gamma(n+1) = n!,\ (n \geq 0),$

71. $\int_0^\infty e^{-au^2}\ du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\ (a > 0),$

72. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n u\ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u\ du =$

$$= \begin{cases} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots n}\frac{\pi}{2}, & \text{si } n \text{ es un número entero par y } n \geq 2, \\ \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdots n}, & \text{si } n \text{ es un número entero impar y } n \geq 3 \end{cases}$$

APÉNDICE B

TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

B.1. PRELIMINARES

a) Si $f(t,x)$ es continua y D es una región acotada y cerrada, definida por

$$D = \{(t,x)/a \leq t \leq b, c \leq x \leq d\} \text{ con } a,b,c,d \in \Re,$$

entonces $f(t,x)$ es acotada $\forall(t,x) \in D$, es decir, existe $M > 0$ tal que $|\ f(t,x)\ |, \ \ \forall(t,x) \in D$

b) Sea $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y derivable en el intervalo abierto $a < x < b$ entonces, el teorema del valor medio dice que $\exists \xi \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a),$$

o también $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

c) Sea $\{x_n(t)\}$ una sucesión de funciones. Entonces se dice que $x_n(t)$ converge uniformemente (c.u.) a una función $x(t)$ en el intervalo $a \leq t \leq b$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $N > 0$ tal que $\forall n \geq N$ y $\forall t \in [a,b]$ se cumple que $|x_n(t) - x(t)| < \epsilon$

d) Si las funciones del númeral c) son también continuas en $[a,b]$ entonces $x(t)$ también es continua en $[a,b]$. Es decir, “El límite uniforme de funciones continuas también es continua”.

e) Sea $f(t,x)$ una función continua en la variable x y supongamos que $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente a $x(t)$ cuando $x \to \infty$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(t, x_n(t)) = f(t, x(t))$$

f) Sea $f(t)$ una función integrable en $[a,b]$ entonces

$$|\int_a^b f(t) \; dt| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

y si $|f(t)| \leq M$ (es decir f es acotada en $[a,b]$ entonces

$$\int_a^b |f(t)| \; dt \leq M \int_a^b dt = M(b-a)$$

g) Sea $\{x_n(t)\}$ una sucesión de funciones con $|x_n(t)| \leq M_n \quad \forall t \in [a,b]$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} |M_n| < \infty$ (es decir, $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge absolutamente) entonces $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente en $[a,b]$ a una función $x(t)$. Este teorema se le llama **criterio M de Weierstrass** para la convergencia uniforme de series de funciones.

h) Si $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente a $x(t)$ en $[a,b]$ y si $f(t,x)$ es una función continua en la región

$$D = \{(t,x)/a \leq t \leq b, \; c \leq x \leq d\}$$

cerrada y acotada, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(s, x_n(s)) \, ds = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f(s, x_n(s)) \, ds =$$
$$\int_a^b f(s, \lim_{n\to\infty} x_n(s)) \, ds = \int_a^b f(s, x(s) ds$$

B.2. TEOREMA LOCAL DE EXISTENCIA Y UNICIDAD, CASO UNIDIMENSIONAL

A continuación analizaremos las condiciones para la existencia y unicidad del P.V.I. con la E.D. de primer orden:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0 \;\; (1)$$

Teorema B.1.

Sea $f(t,x)$ continua para todos los valores de t y x donde la función esta definida. Entonces el P.V.I. (1) es equivalente a la ecuación integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \;\; (2)$$

(es decir, $x(t)$ es solución de (1)$\Longleftrightarrow$ $x(t)$ es solución de (2))

Demostración. $\Rightarrow$): si $x(t)$ satisface (1) entonces:
$\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds = x(s)|_{t_0}^{t} = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0$

$\Leftarrow$): si $x(t)$ satisface (2) entonces derivando (2):
$x'(t) = \frac{d}{dx}\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\, ds = f(t,x(t))$

y $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s,x(s))\, ds = x_0$ ■

Definición B.1 (Función de Lipschitz). *Sea*

$$D = \{(t,x)/a \leq t \leq b, c \leq x \leq d\}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a < b$, $\;c < d$; decimos que $f(t,x)$ es continua de Lipschitz en x sobre D, si existe una constante k, con $0 < k < \infty$ tal que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq k|x_1 - x_2|, \;\; \forall (t,x_1), (t,x_2) \in D$$

La constante k se le llama constante de Lipschitz.

Nota:

a) Si $f(t,x)$ es continua de Lipschitz en la variable x entonces $f(t,x)$ es continua en la variable x, para t fijo.

b) Recíprocamente, no toda función continua es continua de Lipschitz.

Ejemplo 1. $f(t,x) = \sqrt{x} \quad 0 \leq t \leq 1, \;\; 0 \leq x \leq 1$
entonces $f(t,x)$ es continua en D, pero

$$|f(t,x) - f(t,0)| = |\sqrt{x} - 0| = \frac{1}{\sqrt{x}}|x - 0| \quad \forall x \in (0,1)$$

pero $\frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ cuando $x \to 0$ por tanto no hay constante de Lipschitz.

Teorema B.2.
Sean $f(t,x)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ continuas en D entonces $f(t,x)$ es continua de Lipschitz en x sobre D.

Demostración: sean (t,x_1) y $(t,x_2) \in D$. Para t fijo $(\frac{\partial f}{\partial x})(t,x)$ es una función en x, entonces por el Teorema del valor medio

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) \text{ tal que } |f(t,x_2) - f(t,x_1)| = |(\frac{\partial f}{\partial x})(t,x)||x_2 - x_1|$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en D, entonces es acotada en D, por lo tanto existe $0 < k < \infty$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \leq k, \;\; \forall (t,x) \in D$ ■

Definición B.2 (Iteración de Picard). *Sea $\{x_n(t)\}$ tal que*

$x_0(t) = x_0$

$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\, ds$

$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\, ds$

$\vdots$

$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds$

a esta sucesión se le llama las iteradas de Picard.

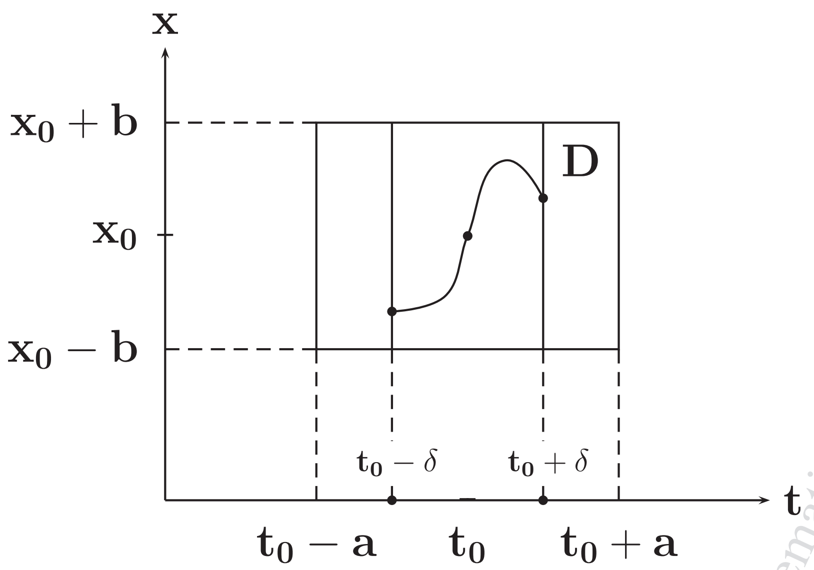


Figura A.1

Teorema B.3 (Existencia).

Sea $f(t, x)$ continua de Lipschitz en x con constante de Lipschitz k en la región D de todos los puntos (t, x) que satisfacen las desigualdades $|t - t_0| \leq a$, $|x - x_0| \leq b$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el P.V.I. $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ tiene solución $x = x(t)$ en el intervalo $|t - t_0| \leq \delta$.

Demostración. (Ver figura A.1). Veamos que las iteradas de Picard convergen uniformemente y dan en el límite la solución a la ecuación integral

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Como f es continua en D, entonces $\exists M > 0$ tal que $\forall (t, x) \in D$: $|f(t, x)| \leq M$
Sea $\delta = min\{a, \frac{b}{M}\}$
Pasos para la demostración:

1. Veamos que las iteradas de Picard $\{x_n(t)\}$ son continuas y satisfacen la desigualdad $|x_n(t) - x_0| \leq b$ (de esto se concluye que $b - x_0 \leq x_n(t) \leq b + x_0$ y por tanto $f(t, x_n(t))$ esta bien definida, ya que $(t, x_n(t)) \in D$)
$x_0(t) = x_0$ (la función constante siempre es continua)

$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_0(s))\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_0)\, ds$
Como $f(t, x_0)$ es continua en (t, x_0), entonces la integral también es continua, luego $x_1(t)$ es continua.
Similarmente $x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_1(s))\, ds$ es continua ya que $f(t, x(t))$ es continua y así sucesivamente para $n \geq 3, 4, \ldots$
Para $n = 0$ $|x_0(t) - x_0| = 0 \leq b$
Para $n > 0$:

$$\begin{aligned}|x_n(t) - x_0| &= |\int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_{n-1}(s))|\, ds \leq M|\int_{t_0}^{t} ds| = M|t - t_0| \leq M\delta \leq b\end{aligned}$$

(obsérvese que por eso se escogió $\delta = min\{a, \frac{b}{M}\}$)

2. Veamos por inducción que:

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq Mk^{n-1}\, \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq \frac{Mk^{n-1}\delta^n}{n!}$$

Si $n = 1$:

$$\begin{aligned}|x_1(t) - x_0(t)| &= |x_1(t) - x_0| = |\int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\, ds| \\ = |\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds| &\leq |\int_{t_0}^{t} |f(s, x_0|\, ds| = M|\int_{t_0}^{t} ds| = M|t - t_0| \leq M\delta\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n = m$:

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq Mk^{m-1} \frac{|t - t_0|^m}{m!} \leq M \frac{k^{m-1}\delta^m}{m!}.$$

Veamos que se cumple para $n = m + 1$:
En efecto, como f es de Lipschitz en x sobre D: existe $k > 0$ tal que $\forall (t, x_1),\ (t, x_2) : |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$

luego

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(s, x_m(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_{m-1}(s))\, ds|$$
$$= |\int_{t_0}^{t} (f(s, x_m(s)) - f(s, x_{m-1}(s)))\, ds| \leq |\int_{t_0}^{t} |f(s, x_m(s)) - f(s, x_{m-1}(s))|\, ds|$$
$$\leq k|\int_{t_0}^{t} |x_m(s) - x_{m-1}(s)|\, ds| \leq k|\int_{t_0}^{t} M k^{m-1} \frac{|s-t_0|^m}{m!}\, ds|$$
$$= k^m M|\int_{t_0}^{t} \frac{|s-t_0|^m}{m!}\, ds = k^m M \frac{|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!} \leq k^m M \frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!}$$

3. Veamos que $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente a una función $x(t)$ para $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$; esto demostrará que $x(t)$ es continua en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

En efecto, $x_n(t) - x_0(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t) + x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t) + x_{n-2}(t) - \ldots + x_1(t) - x_0(t) = \sum_{m=1}^{n} [x_m(t) - x_{m-1}(t)]$

pero por 2. se tiene
$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq M \frac{k^{m-1}\delta^m}{m!} = \frac{M}{k}\frac{k^m \delta^m}{m!}$, con $|t - t_0| \leq \delta$

y como $\sum_{m=1}^{n} |x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq \frac{M}{k}\sum_{m=1}^{n} \frac{(k\delta)^m}{m!} = \frac{M}{k}(e^{k\delta} - 1)$

Por el criterio M de Weierstrass se concluye que

$$\sum_{m=1}^{n} [x_m(t) - x_{m-1}(t)]$$

converge absoluta y uniformemente para $|t - t_0| \leq \delta$ a una función única $y(t)$.

Pero

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} [x_m(t) - x_{m-1}(t)] = \lim_{n\to\infty} [x_n(t) - x_0(t)] = \lim_{n\to\infty} x_n(t) - x_0(t)$$

luego
$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = y(t) + x_0(t) \equiv x(t)$$

es decir, el límite de las funciones de Picard existe y es uniforme para $|t - t_0| \leq \delta$; es decir, $x_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t)$, para $|t - t_0| \leq \delta$

4. Veamos que $x(t)$ es solución de $x'(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\ ds$ para $|t - t_0| \leq \delta$
Como $f(t, x)$ es continua en x y $x_{n(t)} \xrightarrow{c.u.} x(t), \quad |t - t_0| \leq \delta$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(t, x_n(t)) = f(t, x(t))$$

luego, por la definición de funciones de Picard

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}(t) &= x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\ ds \\ &\overset{h)}{=} x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, x_n(s))\ ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\ ds \end{aligned}$$

luego $x(t)$ es solución de $x'(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\ ds$ ■

Teorema B.4 (**Desigualdad de Gronwald).**

Sea $x_1(t)$ una función continua y no negativa y si

$$x(t) \leq A + B\left|\int_{t_0}^{t} x(s)\ ds\right|$$

donde A y B son constantes positivas para todo t tal que $|t - t_0| \leq \delta$, entonces $x(t) \leq Ae^{B|t-t_0|}$ para $|t - t_0| \leq \delta$

Demostración: veamos el teorema para $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$. La demostración para $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$ es semejante.

Definimos $y(t) = B\int_{t_0}^{t} x(s)\ ds$
luego $y'(t) = Bx(t) \leq B(A + B\int_{t_0}^{t} x(s)\ ds) = AB + By(t)$
luego $y'(t) - By(t) \leq AB$ (1)
Pero $\frac{d}{dt}[y(t)e^{-B(t-t_0)}] = e^{-B(t-t_0)}[y'(t) - By(t)]$

Multiplicando (1) por $e^{-B(t-t_0)}$:

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-B(t-t_0)}) \leq ABe^{-B(t-t_0)}$$

e integrando a ambos lados, desde t_0 hasta t y sabiendo que $e^{-B(t-t_0)} > 0$, entonces

$$y(s)e^{-B(t-t_0)}|_{t_0}^{t} \leq -Ae^{-B(t-t_0)}|_{t_0}^{t}$$

y como $y(t_0) = 0$ entonces $y(t)e^{-B(t-t_0)} \leq A(1 - e^{-B(t-t_0)})$
luego

$$y(t) \leq A(e^{B(t-t_0)} - 1)$$

y como $x(t) \overset{\text{hip.}}{\leq} A + By(t) \leq Ae^{B(t-t_0)}$ ■

Teorema B.5 (**Unicidad**).

Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema de existencia. Entonces $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ *es la única solución continua en* $|t - t_0| \leq \delta$ *del P.V.I.:* $x'(t) = f(t, x(t))$ *con* $x(t_0) = x_0$ *(1)*

Demostración. supongamos que $x(t)$ y $y(t)$ son dos soluciones continuas y distintas del P.V.I. (1) en $|t - t_0| \leq \delta$ y supongamos que $(t, y(t)) \in D$ para todos $|t - t_0| \leq \delta$.

Sea $v(t) = |x(t) - y(t)|$ y por tanto $v(t) > 0$ y continua.
Como $f(t, x)$ es continua de Lipschitz en x sobre D, entonces

$$v(t) = |x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, x(s))\, ds - (x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, y(s))\, ds)| \leq$$
$$k|\int_{t_o}^{t} |x(t) - y(t)|\, ds| = k|\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds| < \epsilon + k|\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds|, \quad \forall \epsilon > 0$$

Por la desigualdad de Gronwall: $v(t) < \epsilon e^{k|t-t_0|}$, $\forall \epsilon > 0$ y por tanto $v(t) < 0$ y sabemos que $v(t) > 0$, de aquí que $v(t) = 0$ o sea que $x(t) = y(t)$ ■

Teorema B.6 (**Teorema de Picard**).

Si $f(t, x)$ *y* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *son continuas en* D*. Entonces existe una constante* $\delta > 0$ *tal que las funciones de Picard* $\{x_n(t)\}$ *convergen a una solución única y continua en* $|t - t_0| \leq \delta$ *del P.V.I. (1)*

Demostración: es consecuencia directa del teorema A.2 y de los teoremas de existencia y unicidad. ■

Nota: este teorema se puede generalizar para sistemas de n ecuaciones con n incognitas

Teorema B.7 (**Teorema de Picard Generalizado).**

Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\vec{x}_0$ y si $\vec{f} \in C^1(E)$. Entonces existe un $a > 0$ tal que el problema de valor inicial:

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

tiene una solución única en el intervalo $[-a, a\vec{f}(t, x)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en D. Entonces existe una constante $\delta > 0$ tal que las funciones de Picard $\{x_n(t)\}$ convergen a una solución única y continua en $|t - t_0| \leq \delta$ del P.V.I. (1)

B.3. TEOREMAS LOCAL Y GLOBAL PARA SISTEMAS DE E. D. LINEALES

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x_1' &:= f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \quad x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2' &:= f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \quad x_2(t_0) = x_{20} \\ &\vdots \\ x_n' &:= f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \quad x_n(t_0) = x_{n0} \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

o sea que vectorialmente el sistema anterior queda así:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\,' = \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t_0) = \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}} \tag{B.2}$$

donde $\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ = norma de $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$

Si $A_{n\times n}$, hay varias maneras de definir la norma de A.
La más sencilla es:

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Se puede mostrar que tanto para $\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\|$ como para $\|A\|$ se cumple que:

i) $\|\vec{x}\| \geq 0$ y $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

ii) $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$ para todo α escalar.

iii) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Además para el caso matricial también se cumple que $\|A\vec{x}\| \leq \|A\|\|\vec{x}\|$

Teorema B.8 (Teorema de existencia y unicidad).

Sea D la región $n+1$ dimensional (una para t y n para $\vec{x}$), sea $|t-t_0| \leq a$ y $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq b$.
Supongamos que $\vec{f}(t, \vec{x})$ satisface la condición de Lipschitz

$$\|\vec{f}(t, \vec{x}_1) - \vec{f}(t, \vec{x}_2)\| \leq k\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \quad (*)$$

para$(t, \vec{x}_1), (t, \vec{x}_2) \in D$, donde $k > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que el sistema B.2 tiene una solución única $\vec{x}$ en el intervalo $|t - t_0| \leq \delta$

Demostración. La condición (*) es consecuencia de que las $f_i(t, \vec{x})$ son de Lipschitz, es decir

$$|f_i(t, x_{11}, \ldots, x_{1n}) - f_i(t, x_{21}, \ldots, x_{2n})| \leq k_i \sum_{j=1}^{n} |x_{1j} - x_{2j}| \qquad (**)$$

tomando

$$k = n\sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2}$$

Lo anterior se deduce si se utiliza la desigualdad

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq \|\vec{x}\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

En efecto,

$$\|\vec{f}(t, \vec{x}_1) - \vec{f}(t, \vec{x}_2)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[f_i(t, \vec{x}_1) - f_i(t, \vec{x}_2)]^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(k_i \sum_{j=1}^{n} |x_{1j} - x_{2j}|)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2(\sum_{j=1}^{n} |x_{1j} - x_{2j}|)^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2 (n\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2\|)^2} = \sqrt{n^2\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2\|^2 \sum_{i=1}^{n} k_i^2}$$

$$= n\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1 - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2\|^2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2}$$

luego

$$k = n\sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2}$$

También

$$|f_i(t, x_{11}, \ldots, x_{1n}) - f_i(t, x_{21}, \ldots, x_{2n})| \leq k_i \max_{j=1,\ldots,n} |x_{1j} - x_{2j}| \qquad (***)$$

Verificar (**) y (***) es más fácil que verificar (*).

Por último, si $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ (para $i, j = 1, \ldots, n$) son continuas en D, entonces son acotadas en D y las condiciones (**) y (***) resultan por el teorema del valor medio.

Ahora veamos la existencia y unicidad globales de soluciones de sistemas lineales con coeficientes continuos.

Sea

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\,'(t) = A(t)\overrightarrow{\boldsymbol{x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t), \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t_0) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0, \quad \alpha \leq t \leq \beta \;\; (1)$$

y $A(t)$ una matriz $n \times n$ ■

Teorema B.9 (Existencia y unicidad para sistemas lineales).

Sean $A(t)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}(t)$ una función matricial y vectorial respectivamente, continuas en $\alpha \leq t \leq \beta$. Entonces existe una función vectorial única $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t)$ que es solución de (1) en $[\alpha, \beta]$

Demostración: definimos las funciones iteradas de Picard

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0(s) + \overrightarrow{\boldsymbol{f}}(s)]\, ds$$

$$\vdots$$

$$\vec{x}_{n+1}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\vec{x}_n(s) + \vec{f}(s)]\, ds$$

$$\vdots$$

Claramente estas iteradas son continuas en $[\alpha, \beta]$ para $n = 1, \ldots, n$. Como $A(t)$ es una función matricial continua, entonces

$$\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|A(t)\| = \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| = k < \infty$$

Sea

$$M = \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|A(t)\vec{x}_0 + \vec{f}(t)\| < \infty$$

el cual existe ya que $A(t)$ y $\vec{f}(t)$ son continuas en un cerrado.

i) Observemos que para cualquier par de vectores $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ y para

$$\begin{aligned} \alpha \leq t \leq \beta, \quad \|[A(t)\vec{x}_1 + \vec{f}(t)] - [A(t)\vec{x}_2 + \vec{f}(t)]\| &= \|A(t)(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\| \\ &\leq \|A(t)\| \; \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \leq k\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \end{aligned}$$

luego la función $A(t)\vec{x} + \vec{f}$ es de Lipschitz para cualquier $\vec{x}$ y $\alpha \leq t \leq \beta$

ii) Por inducción, veamos que las iteradas de Picard satisfacen la desigualdad

$$\|\vec{x}_n(t) - \vec{x}_{n-1}(t)\| \leq M k^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq M k^{n-1} \frac{(\beta - \alpha)^n}{n!}$$

Si $n = 1$:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left[A(s)\vec{x}_0 + \vec{f}(s)\right] ds \right\| \leq \\ \left| \int_{t_0}^{t} \left\| A(s)\vec{x}_0 + \vec{f}(s) \right\| ds \right| \leq M \left| \int_{t_0}^{t} ds \right| = M|t - t_0| \leq M(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para $n = m$. Veamos que se cumple para $n = m + 1$:

$$\|\vec{x}_{m+1}(t) - \vec{x}_m(t)\| \leq$$
$$\left|\int_{t_0}^{t} \left\| \left[A(s)\vec{x}_m(s) + \vec{f}(s)\right] - \left[A(s)\vec{x}_{m-1}(s) + \vec{f}(s)\right] \right\| ds \right| \leq$$
$$k\left|\int_{t_0}^{t} \|\vec{x}_m(s) - \vec{x}_{m-1}(s)\|\, ds\right| \leq k\left|\int_{t_0}^{t} Mk^{m-1}\frac{|s-t_0|^m}{m!}\, ds\right| =$$

$= Mk^m \frac{|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!} \leq Mk^m \frac{(\beta-\alpha)^{m+1}}{(m+1)!}$ ■

Nota: la diferencia entre estos teoremas y el A.3 es que en el caso lineal la cota M puede definirse independiente de x, mientras que en el A.3 debe restringirse x y t. Esta diferencia demuestra el resultado de existencia única en todo el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$

Corolario B.1 (**Teorema de existencia y unicidad global).**

Sean $A(t)$ y $\vec{f}(t)$ continuas en $-\infty \leq t \leq \infty$. Entonces existe una única solución continua $\vec{x}(t)$ de $\vec{x}\,'(t) = A(t)\ \vec{x}(t) + \vec{f}(t)$ con $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ definida para todo $-\infty \leq t \leq \infty$

Demostración: supongamos que $|t_0| \leq n$. Sea $\vec{x}_n(t)$ la única solución de

$$\vec{x}\,' = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

en el intervalo $|t| \leq n$ la cual esta garantizada por el teorema anterior. Notemos que $\vec{x}_n(t)$ coincide con $\vec{x}_{n+k}(t)$ en el intervalo $|t| \leq n$ para $k = 1, 2, \ldots$.
Luego $\vec{x}_n(t) = \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n(t)$ esta definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y es única, ya que esta definida de manera única en cada intervalo finito que contiene a t_0 ■

APÉNDICE C

EXPONENCIAL DE OPERADORES

Sea $\pounds(\mathbb{R}^n)$ el espacio de los operadores $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Definición C.1 (Norma de T).

$$\|T\| = \textit{norma de } T = \max_{|\vec{x}|\leq 1} |T(\vec{x})|$$

donde $|\vec{x}|$ *es la norma euclídea de* $|\vec{x}| \in \mathbb{R}^n$, *es decir*

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Propiedades: para $S,\ T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ se cumple

a). $\|T\| \geq 0$ y $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$

b). para $k \in \mathbb{R}$: $\quad \|kT\| = |k|\|T\|$

c). $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$

Recordemos que en $\mathbb{R}^n$ la representación de un operador se hace por medio de la matriz $A_{n\times n}$ y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwars se llega a que $\|A\| \leq \sqrt{n}\,\ell$ donde ℓ es la máxima longitud de los vectores fila de A.

Definición C.2 (Convergencia de operadores). *Una sucesión* $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de operadores en* $\pounds(\mathbb{R}^n)$ *se dice que converge a un operador* $T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ *cuando* $k \to \infty$ *si para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $k \geq N$ *se cumple que*

$$\|T - T_k\| < \epsilon$$

y lo denotamos así

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T$$

Lema C.1. *Para* $S,\ T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ *y* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que*

a). $|T(x)| \leq \|T\|\ |\vec{x}|$

b). $\|T\ S\| \leq \|T\|\ \|S\|$

c). $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$

Demostración. a). para $|\vec{x}| = |\vec{0}|$ es inmediato
para $\vec{x} \neq \vec{0}$, definimos $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$, por la definición de norma para T:

$$\|T\| \geq |T(y)| = |T(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|})| = \frac{1}{|\vec{x}|}|T(x)|$$

luego $\|T(\vec{x}\| \leq |\vec{x}|\ \|T\|$

b). para $|\vec{x}| \leq 1$; por a).:

$$|T(S(x))| \leq \|T\|\ |S(\vec{x}| \leq \|T\|\ \|S\|\ |\vec{x}|$$

luego

$$\|TS\| = \max_{|\vec{x}|\leq 1} |TS(\vec{x})| \leq \|T\|\ \|S\|$$

c). es inmediato a partir de b).

■

Teorema C.1.

Sea $T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ *y* $t_0 > 0$, *entonces la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

es uniforme y absolutamente convergente para todo $t \leq t_0$

Demostración: sea $\|T\| = a$; por c). en el lema anterior: para $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left\|\frac{T^k t^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{a^k t_0^k}{k!}$$

pero $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!} = e^{at_0}$ y por la prueba M de Wieirstrass concluimos que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

es uniforme y absolutamente convergente para todo $|t| \leq t_0$ ■

Definición C.3 (Exponencial de un operador). $e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$

Propiedades:

i. e^T es un operador lineal, es decir, $e^T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$

ii. $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$ (Ver Demostración del Teorema A.9)

Si $T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ entonces su representación matricial la llamamos $A_{n\times n}$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definición C.4 (Exponencial de una matriz). *Sea $A_{n\times n}$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, definimos*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Si $A_{n\times n}$ entonces e^{At} es una matriz $n \times n$, la cual calculamos en el Capitulo 7.

También se demuestra de la misma manera que en el Teorema A.9, que $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\|\, t}$, donde $\|A\| = \|T\|$ y $T(\vec{x}) = A\,\vec{x}$

Teorema C.2.

Si $S,\ T \in \pounds(\mathbb{R}^n)$ entonces

a). Si $S\,T = T\,S$ entonces $e^{S+T} = e^S\, e^T$

b). $\left(e^T\right)^{-1} = e^{-T}$

Demostración. a). Como $S\ T = T\ S$, entonces por el Teorema del binomio

$$(S+T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!}$$

Teniendo en cuenta que el producto de dos series absolutamente convergentes es absolutamente convergente, entonces

$$e^{S+T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S+T)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^j}{j!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^S e^T$$

b). haciendo $S = -T$ en a).: $e^0 = I = e^{-T}\ e^T$ y por tanto $(e^T)^{-1} = e^{-T}$ ■

Ahora veamos el teorema de la derivada de una exponencial matricial.

Teorema C.3 (Derivada de una función exponencial matricial).
Sea A una matriz cuadrada, entonces

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A\ e^{At}$$

Demostración: como A conmuta consigo mismo, entonces por el Teorema C.2 y la definicín de exponencial matricial, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{At} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0}\ e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h} \\
&= e^{At} \lim_{h\to 0} \lim_{k\to\infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \ldots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\
&= A e^{At}
\end{aligned}$$

■

APÉNDICE D

TEOREMA DE LIÉNARD

Dijimos en el capítulo 8 que la E.D.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\,\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \tag{D.1}$$

se le llama ecuación de Liénard y el sistema equivalente, llamado sistema de Liénard, es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x) - f(x)y \end{aligned} \tag{D.2}$$

como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\,\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt} + \int_0^x f(x)dx\right] = \frac{d}{dt}\,[y + F(x)] \tag{D.3}$$

esto último sugiere que hagamos el siguiente cambio de variable

$$z = y + F(x),$$

donde $F(x) = \int_0^x f(x)dx$, con este cambio de variable el sistema D.2 queda convertido en el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z - F(x) \\ \frac{dz}{dt} &= -g(x) \end{aligned} \tag{D.4}$$

y eliminando t nos queda la E.D.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-g(x)}{z - F(x)}.$$

Para la demostración del Teorema de Liénard (Ver el texto Differential Equations and Dynamical Systems de Lawrence Perko) necesitamos hacer $G(x) = \int_0^x g(x)dx$, utilizar la función de energia $u(x,z) = \frac{z^2}{2} + G(x)$ y tengamos en cuenta que la derivada de una función impar es una función par y la integral definida entre 0 y x de una función impar es una función par.

Teorema D.1 (**Teorema de Liénard).**

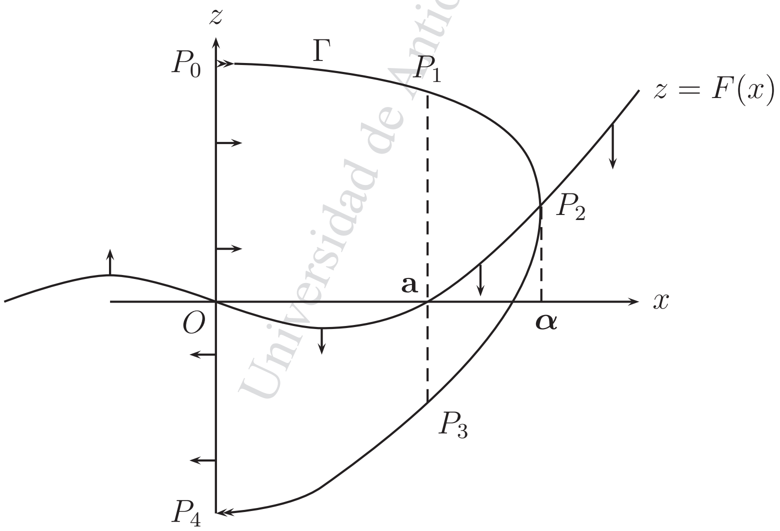
Sean $F(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que:

i. Ambas son continuas así como sus primeras derivadas para todo x.

ii. $F(x)$ y $g(x)$ son impares, tales que $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$.

iii. $F(x)$ tiene un único cero positivo en $x = a$; es negativa para $0 < x < a$; es positiva y monótona creciente para $x \geq a$ y $F(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$,

entonces la ecuación (D.4) tiene un único ciclo límite que rodea al orígen en el plano de fase y a ella tienden en forma de espiral todas las demás trayectorias cuando $t \to \infty$, es decir, es un ciclo límite estable.



Demostración. Antes de comenzar la demostración del teorema, tengamos en cuenta que la condición i. garantiza, por el teorema de Picard, la existencia de una solución única por cada punto del plano de fase XY. la condición ii. y la continuidad de g, implica que $g(0) = 0$, por lo tanto $(0, 0)$ es el único punto crítico del sistema D.4, el campo de direcciones sobre el eje Z positivo es horizontal y hacia la derecha (porque $\frac{dx}{dt} > 0$ y $\frac{dz}{dt} = 0$) y sobre el eje Z negativo es horizontal y hacia la izquierda, sobre la curva $z = F(x)$ el campo de direcciones es vertical y dirijido hacia abajo si $x > 0$ (porque $\frac{dx}{dt} = 0$ y $\frac{dz}{dt} < 0$) y es vertical y dirijido hacia arriba para $x < 0$. También, como el sistema D.4 es invariante al cambiar (x, z) por $(-x, -z)$ entonces, si $\Gamma(x(t), z(t))$ es una trayectoria del sistema D.4 entonces $\Gamma(-x(t), -z(t))$ también es una trayectoria del mismo sistema, esto quiere decir que si Γ_0 es una trayectoria cerrada del sistema (o sea es periódica) entonces deber ser simétrica respecto al origen.
Sea Γ una trayectoria cualquiera del sistema D.4 y sean P_i puntos sobre la trayectoria con coordenadas (x_i, z_i) para $i = 1, 2, 3, 4$ (Ver el figura). Por la forma del campo de direcciones sobre el eje Z positivo y sobre la curva $z = F(x)$, la trayectoria Γ que pasa por P_0 debe cruzar **verticalmente** y hacia abajo, la curva $z = F(x)$ en el punto P_2 y por tanto debe cruzar horizontalmente y hacia la izquierda el eje Z negativo.
Debido a la invarianza del sistema al cambiar (x, z) por $(-x, -z)$, entonces Γ es una trayectoria cerrada si y solo si P_0 y P_4 son simétricos respecto al origen, es decir, si y solo si $z_4 = -z_0$ y utilizando la función de energía $u(x, z) = \frac{z^2}{2} + G(x)$ se debería cumplir que $u(0, z_4) = u(0, z_0)$. Sea A el arco que va desde P_0 hasta P_4 sobre la trayectoria Γ y definamos la función $\phi(\alpha)$ como la siguiente integral de línea

$$\phi(\alpha) = \int_A du = u(0, y_4) - u(0, y_0)$$

donde α es la abscisa del punto P_2, es decir $\alpha = x_2$, veamos que Γ es una trayectoria cerrada del sistema si y solo si $\phi(\alpha) = 0$, para ello mostremos que la función $\phi(\alpha)$ tiene exactamente una raíz $\alpha = \alpha_0$ para $\alpha_0 > a$. Notemos que sobre Γ

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial z}dz = G'(x)dx + zdz = g(x)dx + (\frac{dx}{dt} + F(x))dz$$

y como $g(x) = -\frac{dz}{dt}$ y $dz = \frac{dz}{dx}dx$ y utilizando la regla de la cadena, concluimos que

$$du = -\frac{dz}{dt}dx + \frac{dx}{dt}dz + F(x)dz = -\frac{dz}{dt}dx + \frac{dx}{dt}\frac{dz}{dx}dx + F(x)dz =$$

$$= -\frac{dz}{dt}dx + \frac{dz}{dt}dx + F(x)dz = F(x)dz$$

Si $\alpha < a$ entonces $F(x) < 0$ y $dz = -g(x)dt < 0$ y por tanto $du > 0$ o sea que $\phi(\alpha) > 0$, luego $u(0, z_4) > u(0, z_0)$, en conclusión cualquier trayectoria Γ que cruce la curva $z = F(x)$ en un punto P_2 con $0 < x_2 = \alpha < a$ debe ser no cerrada.
Ahora veamos que para todo $\alpha \geq a$, la función $\phi(\alpha)$ es monótona decreciente y decrece desde el valor positivo $\phi(a)$ hacia $-\infty$ cuando α crece en el intervalo $[0, \infty)$.
Para $\alpha > a$ como en la figura, descomponemos el arco A en tres arcos: A_1 que va desde P_0 hasta P_1, A_2 que va desde P_1 hasta P_3, A_3 que va desde P_3 hasta P_4 y definimos las tres funciones (que son integrales de línea):

$$\phi_1(\alpha) = \int_{A_1} du, \qquad \phi_2(\alpha) = \int_{A_2} du, \qquad \phi_3(\alpha) = \int_{A_3} du,$$

por lo tanto, $\phi(\alpha) = \phi_1(\alpha) + \phi_2(\alpha) + \phi_3(\alpha)$. A lo largo de Γ se tiene que

$$du = F(x)dz = \left(z - \frac{dx}{dt}\right)\frac{dz}{dx}dx = z\frac{dz}{dx}dx - \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}dx = z\frac{dz}{dx}dx - \frac{dz}{dt}dx$$
$$= \left(g(x) + z\frac{dz}{dx}\right)dx = \left(g(x) - z\frac{g(x)}{z - F(x)}\right)dx = \frac{-F(x)g(x)}{z - F(x)}dx$$

A lo largo de los arcos A_1 y A_3, $F(x) < 0$ y $g(x) > 0$ y $\frac{dx}{z-F(x)} = dt > 0$, por lo tanto $\phi_1(\alpha) > 0$ y $\phi_3(\alpha) > 0$ y a lo largo de A_2 $F(x) > 0$ y $g(x) > 0$ y $\frac{dx}{z-F(x)} = dt > 0$, por lo tanto $\phi_2(\alpha) < 0$. Como las trayectorias Γ del sistema D.4 (por el Teorema de Picard) no se cruzan, entonces un aumento de α implica que el arco A_1 sube (o lo que es lo mismo el punto P_0 sube), el arco A_2 baja (o lo que es lo mismo el punto P_4 baja) y en el arco A_3 el punto P_2 se desplaza hacia la derecha (o sea que $x_2 = \alpha$ aumenta).
A lo largo de A_1 los límites de integración con respecto a x de la integral de línea permanecen constantes ($x_0 = 0$ y $x_1 = a$) y para cada x fijo de $[0, a]$, al aumentar α, sube el arco A_1, lo cual quiere decir que se incrementa z y por tanto el integrando $\frac{-F(x)g(x)}{z-F(x)}$ de la integral de línea disminuye y por lo tanto $\phi_1(\alpha)$ decrece.
A lo largo de A_3 los límites de integración con respecto a x de la integral de linea permanecen constantes ($x_3 = a$ y $x_4 = 0$) y para cada x fijo de $[0, a]$ al aumentar α, baja el arco A_3, lo cual quiere decir que z decrece y por tanto

el integrando $\frac{-F(x)g(x)}{z-F(x)}$ de la integral de línea disminuye en magnitud y por lo tanto $\phi_3(\alpha)$ decrece, puesto que

$$\phi_3(\alpha) = \int_a^0 \frac{-F(x)g(x)}{z-F(x)}dx = \int_0^a \left|\frac{-F(x)g(x)}{z-F(x)}\right| dx$$

A lo largo de A_2, escribimos $du = F(x)dx$, como lo dijimos anteriormente, las trayectorias no se interceptan, un aumento de α implica que P_2 se desplaza hacia la derecha, como a lo largo de A_2 los límites de integración con respecto a z permanecen constantes (son z_1 y z_3) y además para cada z en el intervalo $[z_3, z_1]$, al incrementar x se incrementa $F(x)$ y por lo tanto

$$\phi_3(x) = \int_{z_1}^{z_3} F(x)dz = -\int_{z_3}^{z_1} F(x)dz$$

decrece, en particular para $x = \alpha$, $\phi_3(\alpha)$ es decreciente. Hemos encontrado que $\phi_1(\alpha)$, $\phi_2(\alpha)$ y $\phi_3(\alpha)$ son decrecientes, por lo tanto $\phi(\alpha)$ es monótona decreciente para $\alpha \geq a$.
Falta por demostrar que $\phi(\alpha) \to -\infty$ cuando $\alpha \to \infty$, para ello basta con demostrar que $\phi_2(\alpha) \to -\infty$ cuando $\alpha \to \infty$. Como a lo largo de A_2, $du = F(x)dz = -F(x)g(x)dt < 0$, entonces para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y teniendo en cuenta que $F(x)$ es monótona creciente para $x > a$ y $z_3 < 0$:

$$\begin{aligned}|\phi_2(\alpha)| = -\int_{z_1}^{z_3} F(x)dz = \int_{z_3}^{z_1} F(x)dz > \int_{z_3+\epsilon}^{z_1-\epsilon} F(x)dz \\ > F(\epsilon)\int_{z_3+\epsilon}^{z_1-\epsilon} dz = F(\epsilon)(z_1 - z_3 - 2\epsilon) \\ > F(\epsilon)(z_1 - 2\epsilon)\end{aligned}$$

pero como $z_1 > z_2$ y $z_2 \to \infty$ cuando $x_2 = \alpha \to \infty$, por lo tanto $|\phi_2(\alpha)| \to \infty$ cuando $\alpha \to \infty$ o sea que $\phi_2(\alpha) \to -\infty$ cuando $\alpha \to \infty$.
Como $\phi(\alpha)$ es una función continua que decrece monotónicamente desde el valor positivo $\phi(a)$ hacia $-\infty$ entonces existe un α_0 en (a, ∞) tal que $\phi(\alpha_0) = 0$, por lo tanto existe una única trayectoria cerrada Γ_0 que pasa por el punto $(\alpha_0, F(\alpha_0))$.
Para finalizar, como $\phi(\alpha) < 0$ para $\alpha > \alpha_0$ entonces por la simetría del sistema D.4, para $\alpha \neq \alpha_0$ la sucesión de los puntos de intersección con el eje Z de las trayectorias Γ que pasan por el punto $(\alpha, F(\alpha))$, tienden a la ordenada z de intersección de Γ_0 con el eje Z, es decir, Γ_0 es un ciclo límite estable. ■

APÉNDICE E

FRACCIONES PARCIALES

Expondremos a continuación un método para hallar fracciones parciales, distinto al expuesto tradicionalmente en los cursos de Cálculo. Este método es útil en el Capítulo de Transformada de Laplace.

E.1. Factores lineales no repetidos.

Consideremos la fracción

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_n)}$$

donde $N(s), D(s)$son polinomios de coeficientes reales y el grado de $N(s)$ es menor que el grado de $D(s)$ y no tienen factores comunes. Entonces

$$\frac{N(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_n)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{s-a_n},$$

multiplicando ambos lados por $s-a_i$ y hallando el límite del resultado cuando $s \to a_i$ se obtiene

$$A_i = \frac{N(a_i)}{M_i(a_i)},$$

donde M_i es el denominador obtenido después de haber suprimido el factor $s-a_i$ en $D(s)$.

Método 1. Para hallar el numerador de la fracción simple $\frac{A_i}{s-a_i}$ de una fracción propia

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_n)},$$

se suprime el factor $s-a_i$ en el denominador de $\frac{N(s)}{D(s)}$ y se sustituye s por a_i en la supreción.

Ejemplo 1. Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2+s+1}{s(s-1)(s+2)}$$

Solución. $\frac{s^2+s+1}{s(s-1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-1} + \frac{A_3}{s+2}$, donde $D(s) = s(s-1)(s+2)$
Por el método 1.

$$A_1 = \left.\frac{N(s)}{(s-1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{0^2+0+1}{(0-1)(0+2)} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left.\frac{N(s)}{s(s+2)}\right|_{s=1} = \frac{1^2+1+1}{(1)(1+2)} = 1$$

$$A_3 = \left.\frac{N(s)}{s(s-1)}\right|_{s=-2} = \frac{(-2)^2-2+1}{(-2)(-2-1)} = \frac{1}{2}$$

E.2. Factores Lineales Repetidos.

Empleamos el símbolo $\left[\frac{N(s)}{M(S)}\right]_a^{(i)}$, para designar el número obtenido al sustituir s por a en $\frac{d^i}{ds^i}[\frac{N(s)}{M(s)}]$, es decir,

$$\left[\frac{N(s)}{M(s)}\right]_a^{(i)} = \frac{d^i}{ds^i}\left[\frac{N(s)}{M(s)}\right]_{s=a}$$

entonces

$$\frac{N(s)}{M(s)(s-a)^k} = \frac{A_1}{(s-a)^k} + \frac{A_2}{(s-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{(s-a)} + \phi(s) \qquad \text{(E.1)}$$

donde $\phi(s)$ y sus derivadas son continuas en a; multiplicando E.1 por $(s-a)^k$ y derivando $k-1$ veces con respecto s y hallando los valores de los A_i al cambiar s por a se obtiene

Método 2.

$$\frac{N(s)/M(s)}{(s-a)^k} = \frac{[N/M]_a^{(0)}}{0!(s-a)^k} + \frac{[N/M]_a^{(1)}}{1!(s-a)^{k-1}} + \frac{[N/M]_a^{(2)}}{2!(s-a)^{k-2}} + \ldots + \frac{[N/M]_a^{(k-1)}}{(k-1)!(s-a)} + \phi(s)$$

donde $\phi(s)$ y sus derivadas son continuas en a.

Ejemplo 2. Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{5s^2-23s}{(2s-2)(2s+4)^4}$$

Solución.

$$\frac{5s^2-23s}{(2s-2)(2s+4)^4} = \frac{1}{32}\frac{5s^2-23s}{(s-1)(s+2)^4} =$$
$$\frac{1}{32}\left[\frac{[N/M_1]_{-2}^{(0)}}{0!(s+2)^4} + \frac{[N/M_1]_{-2}^{(1)}}{1!(s+2)^3} + \frac{[N/M_1]_{-2}^{(2)}}{2!(s+2)^2} + \frac{[N/M_1]_{-2}^{(3)}}{3!(s+2)} + \frac{[N/M_2]_{1}^{(0)}}{0!(s-1)}\right]$$

donde $N(s)/M_1(s) = \frac{5s^2-23s}{s-1}$ y $N(s)/M_2(s) = \frac{5s^2-23s}{(s+2)^4}$

Por el método 2. se tiene

$$\left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]_{-2}^{(0)} = \frac{5(-2)^2-23(-2)}{-2-1} = -22$$

$$\left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]^{(1)} = \frac{5s^2-10s+23}{(s-1)^2} \Longrightarrow \left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]_{-2}^{(1)} = \frac{5(-2)^2-10(-2)+23}{(-2-1)^2} = 7$$

$$\left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]^{(2)} = \frac{-36s+36}{(s-1)^4} = -36\frac{1}{(s-1)^3} \Longrightarrow \left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]_{-2}^{(2)} = -36\frac{1}{(-2-1)^3} = \frac{4}{3}$$

$$\left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]^{(3)} = \frac{108}{(s-1)^4} \Longrightarrow \left[\frac{N(s)}{M_1(s)}\right]_{-2}^{(3)} = \frac{108}{(-2-1)^4} = \frac{4}{3}$$

$$\left[\frac{N(s)}{M_2(s)}\right]^{(0)} = \frac{5s^2-23s}{(s+2)^4} \Longrightarrow \left[\frac{N(s)}{M_2(s)}\right]_{1}^{(0)} = \frac{5(1)^2-23(1)}{(1+2)^4} = -\frac{2}{9}$$

Luego

$$\frac{5s^2-23s}{(2s-2)(2s+4)^4} =$$
$$\frac{1}{32}\left[\frac{-22}{0!(s+2)^4}+\frac{7}{1!(s+2)^3}+\frac{\frac{4}{3}}{2!(s+2)^2}+\frac{\frac{4}{3}}{3!(s+2)}+\frac{-\frac{2}{9}}{0!(s-1)}\right] =$$
$$\frac{1}{32}\left[-\frac{22}{(s+2)^4}+\frac{7}{(s+2)^3}+\frac{2}{3}\frac{1}{(s+2)^2}+\frac{2}{9}\frac{1}{(s+2)}-\frac{2}{9}\frac{1}{(s-1)}\right]$$

E.3. Factores Cuadráticos.

Sea
$$\frac{N(s)}{M(s)[s-(a+ib)][s-(s-(a-ib)]}$$
con $M(a+ib)\neq 0$. A los factores $s-(a+ib),\ s-(a-ib)$ les corresponden la suma de fracciones parciales
$$\frac{A+iB}{s-(a+ib)}+\frac{A-iB}{s-(a-ib)}.$$
Para hallar $A+iB$ o $A-iB$ se procede de la misma manera que en el caso a). (Método 1.), es decir, se suprime el factor $s-(a+ib)$ (o $s-(a-ib)$), quedando $\frac{N(s)}{M(s)[s-(a-ib)]}$ y luego se cambia s por $a+ib$, es decir,
$$A+iB=\frac{N(a+ib)}{M(a+ib)2ib},\qquad A-iB=\frac{N(a-ib)}{M(a-ib)(-2ib)}$$

Ejemplo 3. Descomponer en fracciones parciales
$$\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)}$$

Solución.
$$\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)}=\frac{s^2+2}{s(s-(-1+i))(s-(-1-i))}=$$
$$\frac{A}{s}+\frac{B+iC}{s-(-1+i)}+\frac{B-iC}{s-(-1-i)}$$

$$A=\left.\frac{s^2+2}{s^2+2s+2}\right|_{s=0}=\frac{0^2+2}{0^2+2(0)+2}=1$$

$B + iC = \frac{N(-1+i)}{M(-1+i)2i,1} = \frac{(-1+i)^2+2}{(-1+i)2i} = -\frac{1}{i} = i$

por lo tanto $B = 0,\ C = 1$
luego $\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{i}{s-(-1+i)} + \frac{-i}{s-(-1-i)}$

E.4. Factores Cuadráticos Repetidos.

Sea

$$\frac{N(s)}{M(s)(s-(a+ib))^k(s-(a-ib))^k} = \frac{\left[\frac{N(s)}{M(s)(s-(a-ib))^k}\right]}{(s-(a+ib))^k} =$$
$$\frac{A_1+iB_1}{(s-(a+ib))^k} + \frac{A_2+iB_2}{(s-(a+ib))^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k+iB_k}{(s-(a+ib))} + \phi(s)$$

Se procede de la misma manera que en b). (Método 2.) y se obtiene que

$$A_j + iB_j = \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{N(s)}{M(s)(s-(a-ib))^k}\right]^{(j-1)}_{s=a+ib} =$$
$$\frac{1}{(j-1)!}\,\frac{d^j}{ds^j}\,\frac{N(s)}{M(s)(s-(a-ib))^k}\bigg|_{s=a+ib}$$

para $j = 1, \ldots, k$.

Ejemplo 4. Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{s^2+8}{s(s^2-4s+8)^2}$$

Solución.

$$\frac{s^2+8}{s(s^2-4s+8)^2} = \frac{s^2+8}{s(s-(2+2i))^2(s-(2-2i))^2} =$$
$$\frac{A}{s} + \frac{B+iC}{[s-(2+2i)]^2} + \frac{B-iC}{[s-(2-2i)]^2} + \frac{D+iE}{s-(2+2i)} + \frac{D-iE}{s-(2-2i)}$$

donde

$A = \frac{s^2+8}{(s^2-4s+8)^2}\Big|_{s=0} = \frac{8}{8^2} = \frac{1}{8}$

$$B+iC=\frac{1}{0!}\left[\frac{N(s)}{M(s)(s-(2-2i))^2}\right]^{(0)}_{s=2+2i}=$$
$$\frac{(2+2i)^2+8}{(2+2i)[(2+2i)-(2-2i)]^2}=\frac{(2+2i)^2+8}{(2+2i)[4i]^2}=-\frac{1}{4}$$

luego $B=-\frac{1}{4}$ y $C=0$.

$$D+iE=\frac{1}{1!}\left[\frac{N(s)}{M(s)(s-(2-2i))^2}\right]^{(1)}_{s=2+2i}=$$
$$\frac{d}{ds}\left[\frac{N(s)}{M(s)(s-(2-2i))^2}\right]\Bigg|_{s=2+2i}=$$
$$\frac{2s^2(s-(2-2i))^2-(s^2+8)(s-(2-2i))(3s-(2-2i))}{s^2(s-(2-2i))^4}\Bigg|_{s=2+2i}=$$
$$=-\frac{1}{16}-\frac{3}{16}i$$

luego $D=-\frac{1}{16}$ y $E=-\frac{3}{16}$

por lo tanto

$$\frac{s^2+8}{s(s^2-4s+8)^2}=$$
$$\frac{1}{8}\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\frac{1}{(s-(2+2i))^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{(s-(2-2i))^2}$$
$$-\frac{1}{16}\frac{1+3i}{s-(2+2i)}-\frac{1}{16}\frac{1}{s-(2-2i)}$$