
CAPÍTULO 7

SEMEJANZA

7.1. INTRODUCCIÓN

Definición 57. a. **Razón:** se llama razón, al cociente de dos cantidades, expresadas en la misma magnitud, por ejemplo $\frac{a}{b}$.

b. **Proporción:** se llama proporción a la igualdad de dos razones. Por ejemplo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a los términos a y d se les llama extremos y los términos b y c se les llama medios, al término d se le llama cuarta proporcional entre a , b y c en este orden.

En algunos textos de geometría se utiliza la notación de proporción así: $a : b = c : d$ que se lee “ a es a b como c es a d ”

Propiedades de las proporciones:

1. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $a \cdot d = b \cdot c$
2. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ entonces $d = e$
3. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ o $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ o $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
4. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ o $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$
5. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$ o $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

6. Si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ entonces

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \dots = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

7. Si b es una magnitud tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$, entonces decimos que b es media proporcional entre a y d o lo que es lo mismo: b es media proporcional entre a y d si y solo si $b^2 = a \cdot d$.

7.2. PARALELISMO Y PROPORCIONALIDAD

Definición 58. 1. Un punto $P \in \overleftrightarrow{AB}$ divide al segmento \overline{AB} en una razón r si $\frac{PA}{PB} = r$.

Si $r = 1$ entonces P es el punto medio de \overline{AB} .



Figura 1.

2. Sean \overline{AB} y \overline{CD} y sean $X \in \overleftrightarrow{AB}$ y $Y \in \overleftrightarrow{CD}$, decimos que X e Y dividen a \overline{AB} y \overline{CD} en segmentos proporcionales si

$$\frac{XA}{XB} = \frac{YC}{YD}$$



Figura 2.

El siguiente Lema, llamado el Teorema fundamental del paralelismo es en realidad una generalización del Teorema de la paralela media.

Lema 1 (Teorema fundamental del paralelismo).

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante entonces determinan segmentos congruentes sobre cualquier otra secante.

Demostración. (Ver Figura 3.)

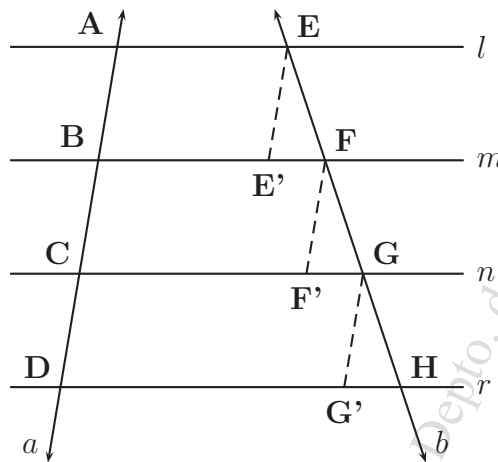


Figura 3.

Sean l, m, n, r cuatro rectas paralelas y a una secante que corta a estas paralelas en A, B, C, D tales que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$. Sea b otra secante que corta a las paralelas en E, F, G, H . Veamos que $\overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH}$.

Por Playfair, por E, F, G pasan $\overleftrightarrow{EE'}, \overleftrightarrow{FF'}, \overleftrightarrow{GG'}$ paralelas a a , donde $E' \in m, F' \in n, G' \in r$.

Por la proposición 2., $\overline{AB} \cong \overline{EE'}, \overline{BC} \cong \overline{FF'}$ y $\overline{CD} \cong \overline{GG'}$ luego $\overline{EE'} \cong \overline{FF'} \cong \overline{GG'}$ y como los ángulos $\widehat{E'EF} \cong \widehat{F'FG} \cong \widehat{G'GH}$ por correspondientes entre paralelas y por la proposición número 1, $\widehat{EE'F} \cong \widehat{FF'G} \cong \widehat{GG'H}$ y por el criterio A-L-A, los siguientes triángulos son congruentes:

$$\triangle EE'F \cong \triangle FF'G \cong \triangle GG'H,$$

luego

$$\overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH} \quad \blacksquare$$

Teorema 90.

Dado un número entero n y dado un segmento, existen puntos en el interior del segmento que lo dividen en n segmentos congruentes.

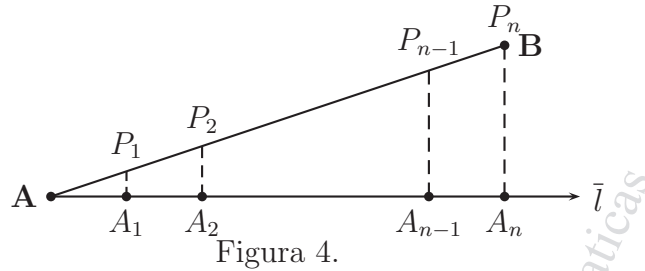


Figura 4.

Demostración. (Ver Figura 4.)

Sea \overline{AB} un segmento y n un número entero, veamos que existen puntos P que dividen al segmento en n segmentos congruentes. Sea \bar{l} una semirrecta cualesquiera, con origen en A tal que \bar{l} no esté contenida en la recta \overleftrightarrow{AB} . Sobre la semirrecta \bar{l} , por el Axioma de continuidad de Arquímedes, existen puntos $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ tales que

$$\overline{AA_1} \cong \overline{A_1A_2} \cong \dots \cong \overline{A_{n-1}A_n}$$

Por Playfair, por A_1, A_2, \dots, A_{n-1} pasan paralelas a $\overline{A_nB}$, las cuales se intersectan con \overline{AB} en P_1, P_2, \dots, P_{n-1} , entonces por el lema anterior

$$\overline{AP_1} \cong \overline{P_1P_2} \cong \dots \cong \overline{P_{n-1}B} \quad \blacksquare$$

Definición 59 (Segmentos conmensurables e inconmensurables). Decimos que un segmento es conmensurable si su medida es un número racional y decimos que un segmento es inconmensurable si su medida es un número irracional.

Teorema 91 (Teorema de Tales).

Si tres o más paralelas cortan a dos o más secantes entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

Demostración. (Ver Figura 5.)

Sean \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{BE} y \overleftrightarrow{CF} rectas paralelas que cortan las secantes a , b en los puntos A, D, B, E, C, F respectivamente.

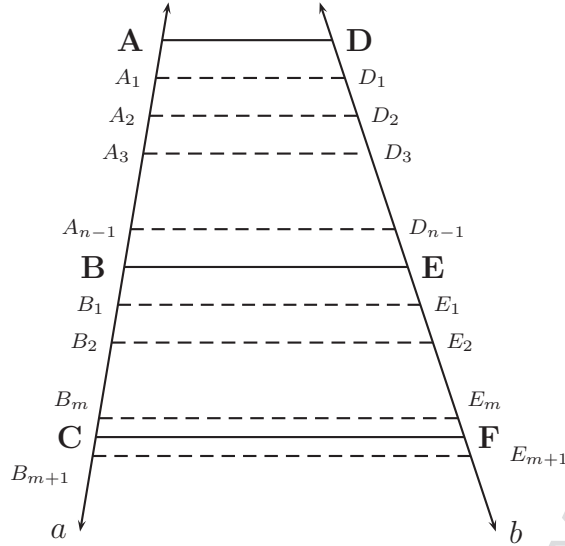


Figura 5.

Veamos que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ o equivalentemente $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$.
 Llamemos $x = \frac{BC}{AB}$ e $y = \frac{EF}{DE}$ y veamos que $x = y$.
 Sea n un número entero cualesquiera, entonces por el Teorema 90., existen puntos A_1, A_2, \dots, A_{n-1} que dividen al segmento \overline{AB} en n segmentos congruentes:

$$\overline{AA_1} \cong \overline{A_1A_2} \cong \overline{A_2A_3} \cong \dots \cong \overline{A_{n-1}B}, \quad AB = nAA_1.$$

Por Playfair, por A_1, A_2, \dots, A_{n-1} pasan rectas paralelas a \overleftrightarrow{AD} que cortan a b en D_1, D_2, \dots, D_{n-1} , luego por el Lema 1. (Teorema fundamental del paralelismo), los segmentos:

$$\overline{DD_1} \cong \overline{D_1D_2} \cong \overline{D_2D_3} \cong \dots \cong \overline{D_{n-1}E}, \quad DE = nDD_1.$$

Por el Axioma de Arquímedes, existen puntos $B_1, B_2, \dots, B_m, B_{m+1}$ en la \overleftrightarrow{BC} tales que

$$\overline{BB_1} \cong \overline{B_1B_2} \cong \overline{B_2B_3} \cong \dots \cong \overline{B_mB_{m+1}} \cong \overline{AA_1},$$

y C entre B, B_{m+1} , por tanto $BB_m = mAA_1$.

Luego,

$$\frac{BB_m}{AB} = \frac{mAA_1}{nAA_1} = \frac{m}{n}$$

Por Playfair, por $B_1, B_2, \dots, B_m, B_{m+1}$ pasan paralelas a \overleftrightarrow{AD} que cortan a \overleftrightarrow{EF} en los puntos

$$E_1, E_2, \dots, E_m, E_{m+1}$$

y por el Lema 1. (Teorema fundamental del paralelismo),

$$\overline{EE_1} \cong \overline{E_1E_2} \cong \overline{E_2E_3} \cong \dots \cong \overline{E_mE_{m+1}}, \quad EE_m = mDD_1.$$

y F entre E y E_{m+1} , ya que C esta entre B y B_{m+1} luego

$$\frac{EE_m}{DE} = \frac{mDD_1}{nDD_1} = \frac{m}{n}$$

Dos casos pueden ocurrir: a.) $x = \frac{m}{n}$ o b.) $x > \frac{m}{n}$ (¿porqué no ocurre el caso $x < \frac{m}{n}$?).

a.) Si $x = \frac{m}{n}$, entonces

$$\frac{BC}{AB} = x = \frac{m}{n} = \frac{mAA_1}{nAA_1} = \frac{BB_m}{AB}$$

y por lo tanto $BC = BB_m$ y como C y B_m están del mismo lado con respecto a B entonces por el axioma de construcción de segmento, $C \equiv B_m$, entonces $F \equiv E_m$, luego $\frac{m}{n} = \frac{EE_m}{DE} = \frac{EF}{DE} = y$.

b.) Supongamos que $x > \frac{m}{n}$ entonces $x = \frac{BC}{AB} > \frac{m}{n}$ o sea que

$$\frac{BC}{nAA_1} > \frac{m}{n} \quad \text{y} \quad mAA_1 < BC < (m+1)AA_1$$

y

$$mDD_1 < EF < (m+1)DD_1$$

por lo tanto

$$y = \frac{EF}{DE} = \frac{EF}{nDD_1} > \frac{mDD_1}{nDD_1} = \frac{m}{n}.$$

En resumen, hemos demostrado que si $x > \frac{m}{n}$ entonces $y > \frac{m}{n}$.

De la misma manera se demuestra que si $y > \frac{m}{n}$ entonces $x > \frac{m}{n}$.

Hasta aquí, hemos demostrado que **para todo número racional** $\frac{m}{n}$, si $x > \frac{m}{n}$ entonces $y > \frac{m}{n}$ y recíprocamente, si $y > \frac{m}{n}$ entonces $x > \frac{m}{n}$. En otras palabras, todo número racional a la izquierda de x esta también a la izquierda de y y todo número racional a la izquierda de y esta a la izquierda de x . Todo esto significa que **no hay un número racional** entre x e y , ya

que si hubiera un número racional entre x e y entonces estaría a la izquierda de uno de ellos y a la derecha del otro, lo cual contradice lo demostrado; por lo tanto $x = y$, es decir:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad \blacksquare$$

Corolario 31 (Teorema de Tales en el triángulo). *Toda recta paralela a un lado de un triángulo y que corte a los otros dos lados, divide a estos lados en segmentos proporcionales.*

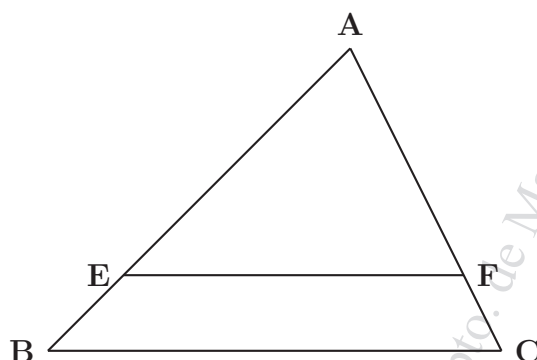


Figura 6.

Lo que afirma este corolario es que si $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ entonces $\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FC}$; por las propiedades de las fracciones

$$\frac{EA + EB}{EB} = \frac{FA + FC}{FC} \quad \text{y} \quad \frac{EA}{EA + EB} = \frac{FA}{FA + FC}$$

luego

$$\frac{AB}{EB} = \frac{AC}{FC} \quad \text{y} \quad \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$$

esto demuestra el siguiente corolario.

Corolario 32. *Dos lados de un triángulo son proporcionales a los segmentos que en ellos determina cualquier recta paralela al tercer lado.*

El siguiente teorema es el recíproco del Corolario 31

Teorema 92 (Recíproco del Teorema de Tales en el triángulo).

Si una recta intercepta dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo.

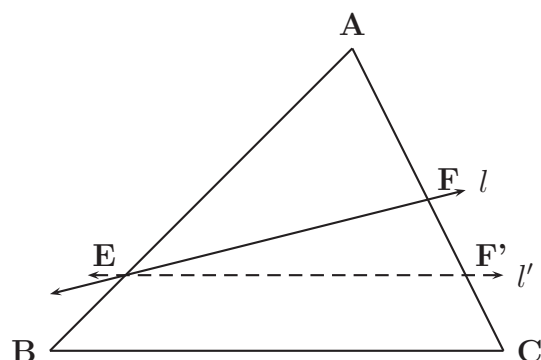


Figura 7.

Demostración. (Ver Figura 7.)

Sea el $\triangle ABC$ y l una recta tal que

$$l \cap \overline{AB} = \{E\}, l \cap \overline{AC} = \{F\}, \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

Por Playfair, por E pasa $l' \parallel \overline{BC}$ la cual intercepta a \overline{AC} en F' , entonces por el Corolario 31 (Teorema de Tales en el triángulo), se tiene:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF'}{F'C}$$

luego $\frac{AF}{FC} = \frac{AF'}{F'C}$ y por las propiedades de las fracciones $\frac{FC}{AF} = \frac{F'C}{AF'}$ o sea que

$$\frac{FC + AF}{AF} = \frac{F'C + AF'}{AF'}$$

que es lo mismo que

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AC}{AF'}$$

luego $AF = AF'$ y por tanto $\overline{AF} \cong \overline{AF'}$ y como F, F' están del mismo lado con respecto a A entonces por el axioma de construcción de segmento $F' \equiv F$ y por lo tanto $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$. ■

En forma similar se demuestran los siguientes recíprocos:

Corolario 33 (Recíproco del Corolario 32). Si dos lados de un triángulo son proporcionales a los segmentos que en ella determina una recta que intercepta los dos lados, entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo.

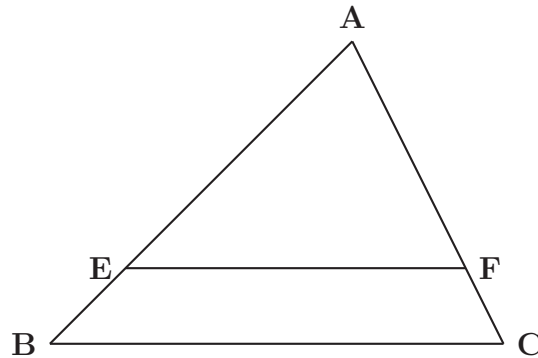


Figura 8.

Lo que afirma este corolario es que si en el $\triangle ABC$ (Ver Figura 8.)

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \quad \text{ó} \quad \frac{AB}{EB} = \frac{AC}{FC}$$

entonces $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$

Teorema 93 (Propiedades métricas de la bisectriz de un triángulo).

La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Demostración. (Ver Figura 9.)

Sea \overline{AV} bisectriz de \hat{A} en el $\triangle ABC$ con $V \in \text{Int}\overline{BC}$. Veamos que $\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC}$.

Por Playfair, por C pasa $l \parallel \overline{AV}$; sea $\{D\} = l \cap \overleftrightarrow{BA}$, luego por alternos internos entre paralelas, $\widehat{VAC} \cong \widehat{ACD}$ y por correspondientes entre paralelas, $\widehat{BAV} \cong \widehat{ADC}$, pero como \overline{AV} es bisectriz por hipótesis, entonces $\widehat{BAV} \cong \widehat{VAC}$, luego

$$\widehat{ADC} \cong \widehat{ACD}$$

y por el teorema del triángulo isósceles, se tiene que $\triangle ADC$ es isósceles y por lo tanto

$$\overline{AD} \cong \overline{AC}.$$

Por el corolario 32 (Teorema de Tales en el triángulo),

$$\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AD},$$

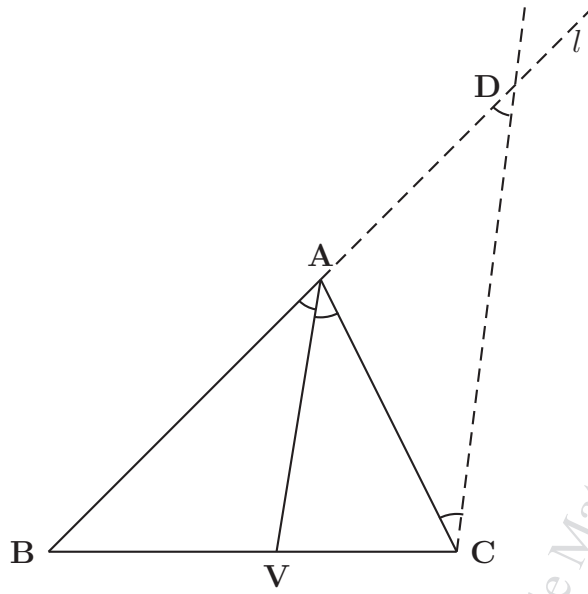


Figura 9.

luego

$$\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC}.$$

■

Teorema 94 (Recíproco del teorema anterior).

Si una recta que pasa por el vértice de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados, entonces esta recta es bisectriz del ángulo ubicado en el vértice por donde pasa la recta.

Demostración. (Ver Figura 10.)

Supongamos que en el $\triangle ABC$ se tiene que \overleftrightarrow{AV} con $V \in \text{Int}\overline{BC}$, tal que $\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC}$. Veamos que \overline{AV} es bisectriz de \hat{A} .

Por Playfair, por C pasa $l \parallel \overline{AV}$; sea $\{D\} = l \cap \overleftrightarrow{BA}$.

Como $l \parallel \overline{AV}$, entonces por el corolario 32, $\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AD}$, pero por hipótesis

$$\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC},$$

entonces

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AD}$$

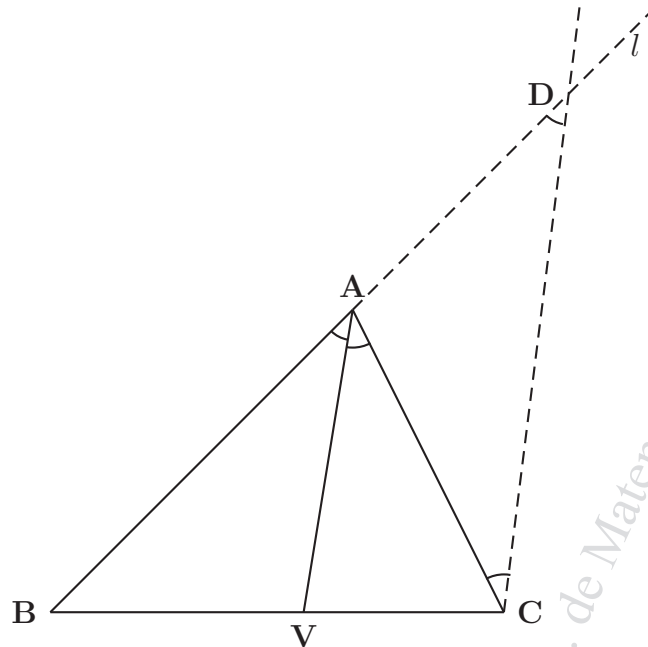


Figura 10.

y por las propiedades de las fracciones $AD = AC$ o sea que $\overline{AD} \cong \overline{AC}$, por lo tanto el $\triangle ADC$ es isósceles y por el Teorema del triángulo isósceles, $\widehat{ADC} \cong \widehat{ACD}$.

Por otro lado, por alternos internos entre paralelas, $\widehat{VAC} \cong \widehat{ACD}$ y por correspondientes entre paralelas, $\widehat{BAV} \cong \widehat{ADC}$.

Luego $\widehat{BAV} \cong \widehat{VAC}$, luego \overline{AV} es bisectriz de \widehat{A} . ■

Teorema 95 (Propiedades métricas de la bisectriz exterior de un triángulo).

La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, que no sea paralela al lado opuesto, divide exteriormente al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Demostración. (Ver Figura 11.)

Sea $\overline{AV'}$ bisectriz del ángulo exterior \widehat{EAC} en el $\triangle ABC$ con $V' \in \overleftrightarrow{BC}$ y $B - C - V'$. Veamos que $\frac{V'B}{V'C} = \frac{AB}{AC}$.

Por Playfair, por C pasa $l \parallel \overline{AV'}$; sea $\{D\} = l \cap \overleftrightarrow{BA}$, luego por alternos

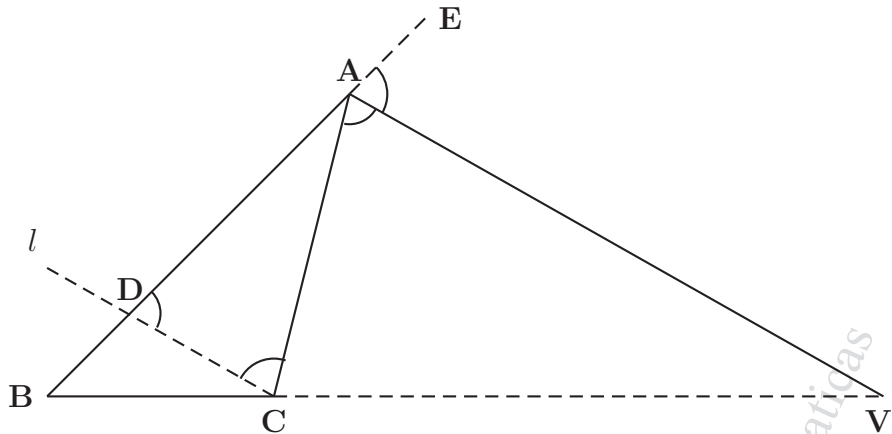


Figura 11.

internos entre paralelas, $\widehat{V'AC} \cong \widehat{ACD}$ y por correspondientes entre paralelas, $\widehat{EAV'} \cong \widehat{ADC}$, pero como $\overline{AV'}$ es bisectriz por hipótesis, entonces $\widehat{CAV'} \cong \widehat{V'AE}$, luego

$$\widehat{ADC} \cong \widehat{ACD}$$

y por el teorema del triángulo isósceles, se tiene que $\triangle ADC$ es isósceles y por lo tanto

$$\overline{AD} \cong \overline{AC}.$$

Por el corolario 32 (Teorema de Tales en el triángulo),

$$\frac{V'B}{V'C} = \frac{AB}{AD},$$

luego

$$\frac{V'B}{V'C} = \frac{AB}{AC}. \quad \blacksquare$$

El recíproco de este teorema se deja como ejercicio.

Teorema 96 (Recíproco del Teorema anterior).

Una recta que pase por el vértice de un triángulo y divida la prolongación del lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados del triángulo, es bisectriz del ángulo exterior ubicado en este vértice.

Definición 60 (División armónica). Si A y B son dos puntos distintos y $C \in \text{Int}\overline{AB}$ y $D \in \overleftrightarrow{AB}$ pero $D \notin \overline{AB}$, decimos que C, D dividen armónicamente a \overline{AB} si

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$



Figura 12.

A los puntos C y D se les llama los conjugados armónicos con respecto a A y B .

Los puntos A, B, C, D en este orden, se dice que forman una división armónica. También, de acuerdo a la definición, podemos afirmar que A y B son conjugados armónicos con respecto a \overline{CD} .

Por los teoremas 93 y 95 y por la definición de conjugado armónico, podemos afirmar el siguiente teorema.

Teorema 97.

La bisectriz de un ángulo de un triángulo y la bisectriz del ángulo exterior adyacente, dividen al lado opuesto armónicamente.

Nota: de acuerdo a los teoremas anteriores, el lugar geométrico de los puntos A tales que la razón de las distancias a dos puntos fijos B y C sea una constante k , es una circunferencia de diámetro $\overline{VV'}$, donde V, V' son los conjugados armónicos de \overline{BC} con razón k .

7.3. SEMEJANZA DE POLÍGONOS

Definición 61 (Polígonos semejantes). Decimos que dos polígonos son semejantes si se puede establecer una correspondencia entre sus lados y sus ángulos de tal manera que:

1. Los lados correspondientes son proporcionales. A estos lados también los llamaremos lados homólogos. La razón r entre los lados homólogos la llamamos razón de semejanza.
2. Los ángulos correspondientes son congruentes. A los ángulos correspondientes congruentes, también se les llama ángulos homólogos.

En particular, para los triángulos tenemos la siguiente definición.

Definición 62 (Triángulos semejantes). Decimos que el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle A'B'C'$, lo cual denotamos así $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, si:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (*), \quad \hat{A} \cong \hat{A}', \quad \hat{B} \cong \hat{B}', \quad \hat{C} \cong \hat{C}' \quad (**)$$

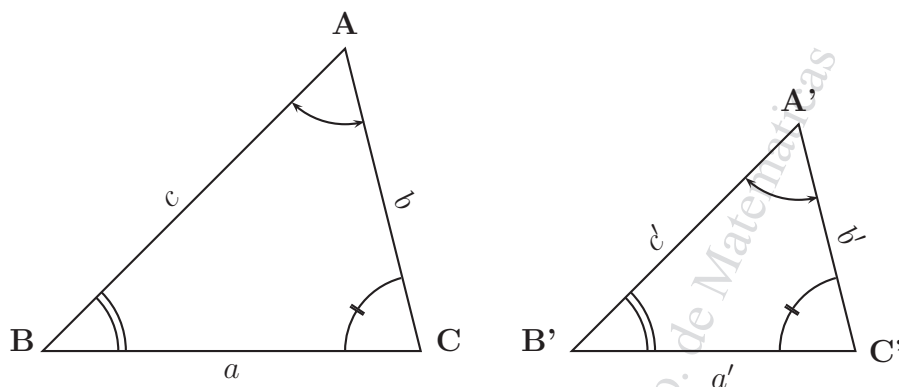


Figura 13.

En este caso decimos que los vértices A y A' , B y B' , C y C' , los lados \overline{AB} y $\overline{A'B'}$, \overline{AC} y $\overline{A'C'}$, \overline{BC} y $\overline{B'C'}$ y los ángulos \hat{A} y \hat{A}' , \hat{B} y \hat{B}' , \hat{C} y \hat{C}' son homólogos o correspondientes.

Nota: 1. Con los teoremas que haremos más adelante, mostraremos que (*) implica (**) y recíprocamente, (**) implica (*).

2. Por las propiedades de las fracciones, se puede demostrar que si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados son entre sí como sus perímetros, es decir, si $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ entonces

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{p}{p'} = r$$

donde $p = a + b + c$ =perímetro del $\triangle ABC$, $p' = a' + b' + c'$ =perímetro del $\triangle A'B'C'$ y r es la razón de semejanza.

3. La relación de semejanza entre polígonos es una relación de equivalencia, es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva (Ejercicio).

Definición 63 (Polígonos congruentes). Decimos que dos polígonos semejantes, son congruentes si tienen sus lados homólogos congruentes.

Teorema 98.

Dos polígonos semejantes son congruentes si un lado de uno de ellos es congruente con su homólogo.

A continuación veremos tres criterios de semejanza de triángulos.

Teorema 99 (Primer criterio de semejanza: Angulo-Angulo (A-A)).

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

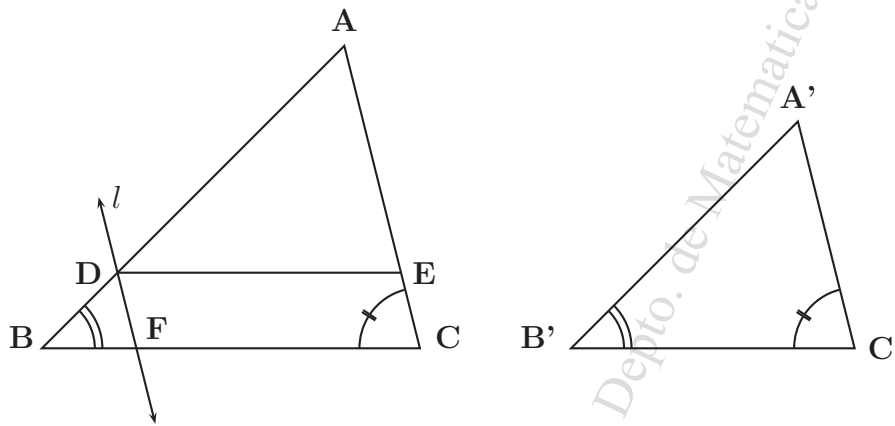


Figura 14.

Demostración. (Ver Figura 14.) Supongamos que en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se tiene que $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$, entonces por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$.

Por el axioma de construcción de segmento, existe un punto $D \in \overrightarrow{AB}$ y $E \in \overrightarrow{AC}$ tales que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$; unamos D con E , entonces por el criterio L-A-L, el $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, por lo tanto $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$, $\widehat{ADE} \cong \widehat{B'}$, pero por hipótesis $\widehat{B'} \cong \widehat{B}$, por lo tanto $\widehat{ADE} \cong \widehat{B}$ y por el teorema de alternos internos (Teorema 31), $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y por el corolario 32,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \quad \text{o sea} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (*)$$

Por Playfair, por D pasa $l \parallel \overleftrightarrow{AC}$, sea $\{F\} = l \cap \overleftrightarrow{BC}$ y por la proposición número 2, $\overline{DE} \cong \overline{FC}$ y como $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$ entonces $\overline{FC} \cong \overline{B'C'}$; por otro

lado, por el corolario 32,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{FC}, \quad \text{o sea} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (**)$$

de (*), (**)

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'},$$

hemos mostrado que los tres pares de ángulos son congruentes y los tres pares de lados respectivos son proporcionales, por lo tanto

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \blacksquare$$

Se deja como ejercicio los siguientes corolarios.

Corolario 34 (Paralela a un lado de un triángulo). *Una paralela a un lado de un triángulo determina otro triángulo semejante al primero.*

Corolario 35. *Si dos triángulos rectángulos tienen un par de ángulos agudos respectivamente congruentes, entonces son semejantes.*

Corolario 36. *Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente paralelos o respectivamente perpendiculares, entonces los dos triángulos son semejantes.*

Corolario 37. *Las alturas y las bisectrices homólogas de dos triángulos semejantes están en la misma razón que sus lados homólogos.*

Corolario 38. *Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen un par de ángulos congruentes.*

Corolario 39. *Todos los triángulos equiláteros son semejantes.*

Teorema 100 (Segundo criterio de semejanza: P-A-P).

Si un ángulo de un triángulo es congruente con otro ángulo de otro triángulo y los lados que comprenden al ángulo en el primer triángulo son respectivamente proporcionales a los lados que comprende al ángulo en el segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

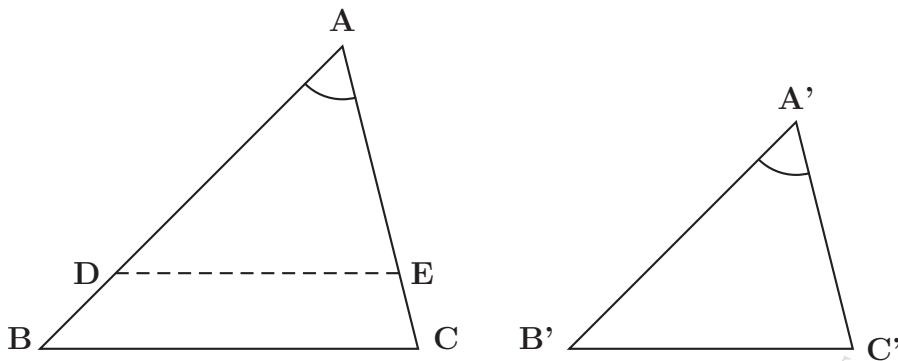


Figura 15.

Demostración. (Ver figura 15.) Tomemos por hipótesis que $\hat{A} \cong \hat{A}'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$. Veamos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Por el axioma de construcción de segmento, existen $D \in \overrightarrow{AB}$ y $E \in \overrightarrow{AC}$ tales que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$, por lo tanto, por el criterio L-A-L, $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

Por otro lado, como $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ entonces $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ y por el corolario 33 (recíproco del corolario 32),

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

Por lo tanto, por el corolario 34, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ y por transitividad

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \blacksquare$$

Corolario 40. *Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus catetos son respectivamente proporcionales.*

Corolario 41. *Las medianas homólogas de dos triángulos semejantes, están en la misma razón que sus lados homólogos.*

Teorema 101 (Tercer criterio de semejanza:P-P-P).

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

Demostración. (Ver Figura 16.) Tomemos por hipótesis que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (*)$$

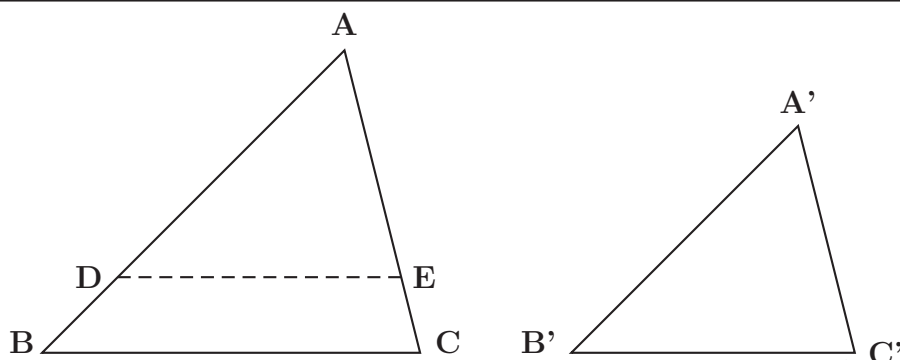


Figura 16.

Por el axioma de construcción de segmento, existen $D \in \overline{AB}$ y $E \in \overline{AC}$ tales que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$, sustituyendo en (*),

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

y por el corolario 33 (recíproco del corolario 32),

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

Por lo tanto, por el corolario 34, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, de esta semejanza se concluye que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \quad \text{o sea que} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE} \quad (**),$$

pero por hipótesis

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (***)$$

de (**) y (***) y por las propiedades de las fracciones: $DE = B'C'$ o sea que

$$\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$$

y por lo tanto, por el tercer criterio de congruencia de triángulos L-L-L: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ y como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, entonces por transitividad,

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'. \quad \blacksquare$$

Corolario 42. Si las bases de dos triángulos isósceles son entre sí como sus otros lados, entonces los triángulos son semejantes.

7.4. SEMEJANZA EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Los resultados de aplicar los conceptos de semejanza al triángulo rectángulo son de mucha importancia, pues obtendremos el teorema de Pitágoras y aplicaciones al triángulo y a los cuadriláteros, a las áreas, etc.

Definición 64. a. La proyección ortogonal de un punto exterior a una recta, es el punto de intersección de una recta perpendicular desde el punto a la recta.

b. La proyección ortogonal de un segmento sobre una recta es el segmento determinado por las proyecciones ortogonales de los extremos del segmento sobre la recta.

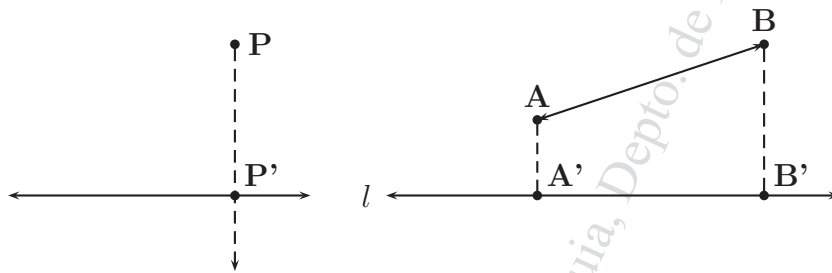


Figura 17.

En la Figura 17., la proyección ortogonal del punto P sobre la recta l es el punto P' , ya que $l \perp \overrightarrow{PP'}$ y $\{P'\} = l \cap \overrightarrow{PP'}$.

La proyección ortogonal del segmento \overline{AB} sobre la recta l es el segmento $\overline{A'B'}$, donde A' y B' son las proyecciones ortogonales sobre l de A y B respectivamente.

Teorema 102 (Proporcionalidad en el triángulo rectángulo).

Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, entonces:

- Los dos nuevos triángulos que resultan, son semejantes entre si y semejantes al triángulo original.
- La altura es media proporcional entre los segmentos que ella determina sobre la hipotenusa.
- Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la hipotenusa.

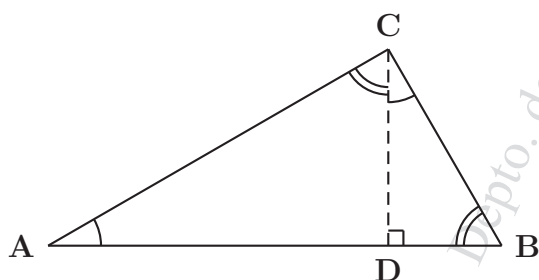


Figura 18.

Demostración. (Ver Figura 18.)

- Sabemos por el corolario 35, que si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo congruente, entonces los dos triángulos son semejantes, por lo tanto

$$\triangle ADC \sim \triangle ABC, \quad \triangle CDB \sim \triangle ABC$$

y por transitividad

$$\triangle ADC \sim \triangle ABC \sim \triangle CDB$$

- Como $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ y $\widehat{CAD} \cong \widehat{DCB}$ y $\widehat{ACD} \cong \widehat{CBD}$ entonces la relación entre los lados homólogos del $\triangle ADC$ con los lados homólogos del $\triangle CDB$ es

$$\frac{\triangle ADC}{\triangle CDB} : \frac{AD}{CD} = \frac{AC}{CB} = \frac{DC}{DB}$$

luego $CD^2 = AD \cdot DB$ o sea que \overline{CD} es media proporcional entre \overline{AD} y \overline{DB} .

- c. Como $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ y $\widehat{ACD} \cong \widehat{CBA}$ y el ángulo \widehat{A} es común, entonces la relación entre los lados homólogos del $\triangle ADC$ con los lados homólogos del $\triangle ABC$ es

$$\frac{\triangle ADC}{\triangle ABC} : \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{CB}$$

luego $AC^2 = AD \cdot AB$ o sea que \overline{AC} es media proporcional entre \overline{AD} y \overline{AB} .

Como $\triangle CDB \sim \triangle ABC$, $\widehat{BCD} \cong \widehat{CAB}$ y el ángulo \widehat{B} es común, se demuestra en forma similar que

$$CB^2 = AB \cdot DB$$

o sea que \overline{CB} es media proporcional entre \overline{AB} y \overline{DB} . ■

Teorema 103 (Teorema de Pitágoras).

El cuadrado de la medida de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

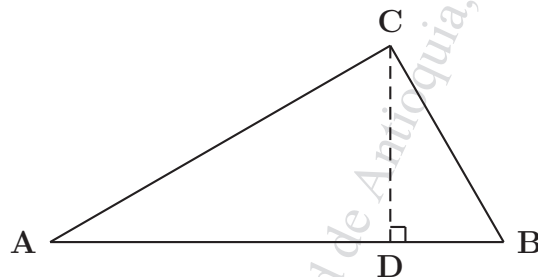


Figura 19.

Demostración. (Ver Figura 19.) Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en C y sea \overline{CD} la altura relativa a la hipotenusa, entonces por la parte c. del anterior teorema:

$$AC^2 = AD \cdot AB, \quad CB^2 = AB \cdot DB$$

y sumando estas dos expresiones, tenemos

$$AC^2 + CB^2 = AD \cdot AB + AB \cdot DB = AB(AD + DB) = AB \cdot AB = AB^2 \quad \blacksquare$$

Teorema 104 (Recíproco del teorema de Pitágoras).

Si en un triángulo el cuadrado de la medida de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.

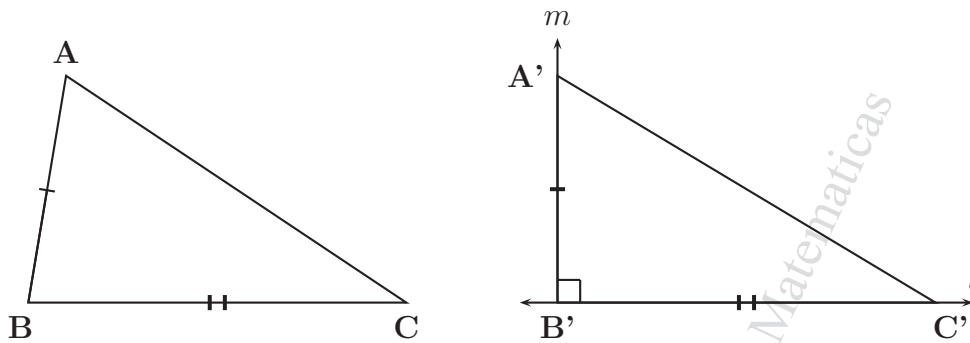


Figura 20.

Demostración. (Ver Figura 20.) Sea el $\triangle ABC$ tal que $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Veamos que el $\triangle ABC$ es rectángulo en B . Para ello, construyamos un triángulo $\triangle A'B'C'$ rectángulo en B' , así: en una recta l fijo un punto B' , por el axioma de construcción de segmento, existe un punto C' en una de las semirrectas determinadas por B' en l , tal que $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$; por el teorema de la perpendicular por un punto de una recta, por B' pasa $m \perp l$, por el axioma de construcción de segmento, existe un punto A' en una de las semirrectas determinadas por B' en m , tal que $\overline{B'A'} \cong \overline{BA}$, por lo tanto el $\triangle A'B'C'$ es rectángulo en B' . Por el teorema de Pitágoras

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2.$$

Pero por hipótesis $AC^2 = AB^2 + BC^2$, luego $A'C'^2 = AC^2$ y por tanto

$$A'C' = AC$$

En los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se tiene:

$$\overline{AC} = \overline{A'C'}, \quad \overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}$$

luego, por el criterio L-L-L, se tiene que

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

luego $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ y como $\widehat{A'B'C'}$ es recto, entonces $\triangle ABC$ es rectángulo en B . ■

7.5. APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Con los siguientes teoremas se demuestra la ley de cosenos en trigonometría.

Teorema 105 (Ley de cosenos).

- a. En un triángulo obtusángulo, el cuadrado de la medida del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados, más el doble producto de la medida de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.
- b. En un triángulo cualquiera, el cuadrado de la medida del lado opuesto al ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados, menos el doble producto de la medida de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

Demostración. a.) (Ver Figura 21.(a)) Supongamos que en el $\triangle ABC$ el ángulo \widehat{ABC} es obtuso y sea \overline{BH} la proyección de \overline{AB} sobre \overleftrightarrow{BC} y sea $\overline{BH_1}$ la proyección de \overline{BC} sobre \overleftrightarrow{AB} , por el Teorema 36, $H - B - C$ y $A - B - H_1$; veamos que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot BH \quad \text{y} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BH_1$$

Demostremos la primera expresión, la otra se hace en forma similar.

Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle AHB$ se tiene

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \quad (*)$$

Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle AHC$ se tiene

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \quad (**)$$

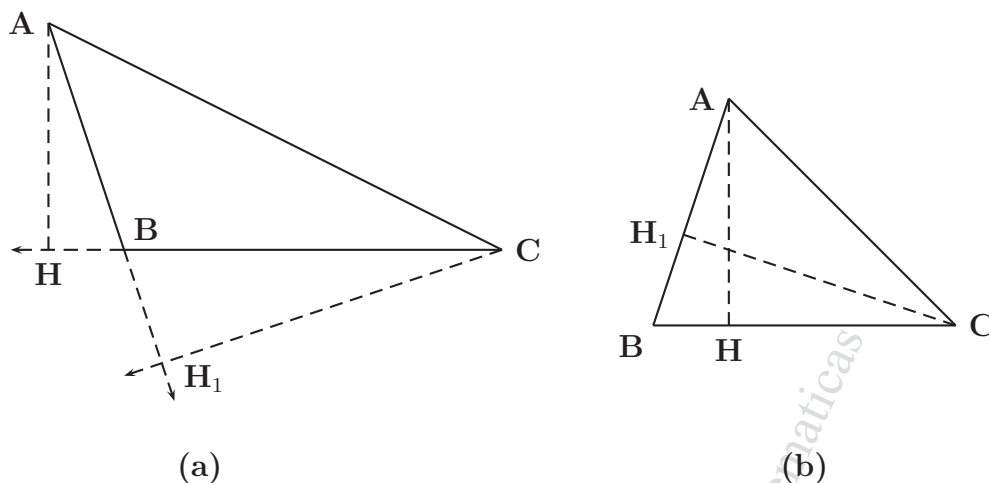


Figura 21.

restando (***) y (*): $AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2$ (***), pero como $H - B - C$, entonces $HC = HB + BC$ y sustituyendo en (***) y despejando

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + (HB + BC)^2 - HB^2 \\ &= AB^2 + HB^2 + BC^2 + 2 \cdot HB \cdot BC - HB^2 \\ &= AB^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot HB \end{aligned}$$

b.) (Ver Figura 21.(b)). Supongamos que en el $\triangle ABC$ el ángulo \widehat{ABC} es agudo y sea \overline{BH} la proyección de \overline{AB} sobre \overline{BC} y sea $\overline{BH_1}$ la proyección de \overline{BC} sobre \overline{AB} , por el Teorema 36, $B - H - C$ y $B - H_1 - A$; veamos que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot BH \quad \text{y} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BH_1$$

Demostremos la primera expresión, la otra se hace en forma similar.

Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle AHB$ se tiene

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \quad (*)$$

Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle AHC$ se tiene

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \quad (**)$$

restando (***) y (*): $AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2$ (***), pero como $B-H-C$, entonces $HC = BC - HB$ y sustituyendo en (***) y despejando

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + (BC - HB)^2 - HB^2 \\ &= AB^2 + BC^2 + HB^2 - 2 \cdot BC \cdot HB - HB^2 \\ &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot HB \end{aligned}$$

Teorema 106 (Teorema de Stewart).

En el $\triangle ABC$, $D \in \text{Int}\overline{BC}$. Si $BD = m$, $DC = n$, $AD = d$, entonces

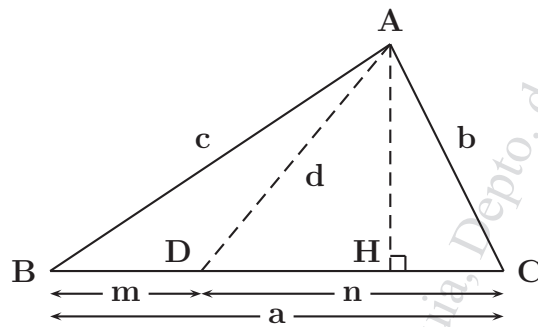
$$d^2 a = b^2 m + c^2 n - amn$$


Figura 22.

Demostración. (Ver Figura 22.) Sea $D \in \overline{BC}$ en el $\triangle ABC$, sea \overline{DH} la proyección de \overline{AD} sobre \overline{BC} ; con el \widehat{ADB} pueden suceder tres casos: i. que sea obtuso, ii. que sea recto, iii. que sea agudo.

Mostremos el primer caso, los otros casos son similares.

Como \widehat{ADB} es obtuso, entonces por el Teorema 36 $B - D - H$ y \widehat{ADC} es agudo y $BD + DC = BC$; por el teorema anterior (ley de cosenos) en el $\triangle ADB$ y en el $\triangle ADC$:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2 \cdot BD \cdot DH \quad (*)$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot DC \cdot DH \quad (**)$$

multiplicando (*) por DC y (**) por BD y luego sumando:

$$\begin{aligned} AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD &= AD^2 \cdot (DC + BD) + BD^2 \cdot DC + DC^2 \cdot BD \\ &= AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC(DC + BD) \\ &= AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC \end{aligned}$$

luego $AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC$ es decir,

$$d^2 a = b^2 m + c^2 n - amn. \quad \blacksquare$$

Teorema 107.

- a.) La suma de los cuadrados de las medidas de dos lados de un triángulo es igual a dos veces el cuadrado de la medida de la mediana del tercer lado más la mitad del cuadrado de la medida del tercer lado.
- b.) La diferencia de los cuadrados de las medidas de dos lados de un triángulo es igual a dos veces el producto de la medida del tercer lado por la proyección de la mediana correspondiente a este lado.

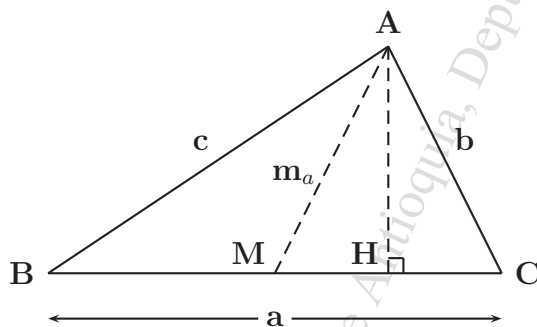


Figura 23.

Demostración. (Ver Figura 23.) En el $\triangle ABC$, sea M el punto medio de \overline{BC} , m_a la mediana relativa al lado \overline{BC} y \overleftrightarrow{MH} la proyección de la mediana $AM = m_a$ sobre \overleftrightarrow{BC} , supongamos que $\overline{AB} > \overline{AC}$. Con el ángulo \widehat{AMB} pueden suceder tres casos: i. es obtuso, ii. es recto, iii. es agudo.

Tomemos el caso i. y veamos que

a.) $c^2 + b^2 = 2 \cdot m_a^2 + \frac{1}{2}a^2$

b.) $c^2 - b^2 = 2 \cdot a \cdot MH.$

En efecto, como \widehat{AMB} es obtuso entonces \widehat{AMC} es agudo, luego por el teorema de la ley de cosenos en el $\triangle AMB$ y en el $\triangle AMC$:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 + 2 \cdot BM \cdot MH \quad (*)$$

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2 \cdot MC \cdot MH \quad (**)$$

sumando (*) y (**) y teniendo en cuenta que M es punto medio, o sea que $MB = MC$, entonces

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2 \cdot AM^2 + BM^2 + MC^2 \\ &= 2 \cdot AM^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \\ &= 2 \cdot AM^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2 \cdot AM^2 + \frac{1}{2}BC^2 \\ c^2 + b^2 &= 2 \cdot m_a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \end{aligned}$$

restando (*) y (**) y teniendo en cuenta que M es punto medio, o sea que $MB = MC$,:

$$\begin{aligned} AB^2 - AC^2 &= 4 \cdot MB \cdot MH \\ &= 4\left(\frac{BC}{2}\right) \cdot MH = 2 \cdot BC \cdot MH \\ c^2 - b^2 &= 2 \cdot a \cdot MH \end{aligned}$$

Teorema 108 (Altura en función de los lados).

En un $\triangle ABC$ cuyos lados miden: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; las alturas miden:

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde $p = \frac{a+b+c}{2}$ = semi-perímetro.

Demostración. (Ver Figura 24.) Sea $h_a = AH$ la altura relativa al lado \overline{BC} , con H pueden ocurrir los siguientes casos i. $B - H - C$, ii. $B - C - H$ o

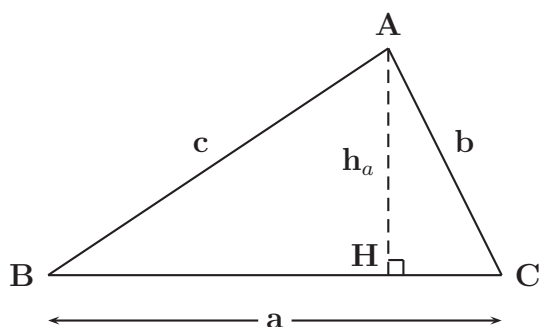


Figura 24.

$H - B - C$, iii. $H \equiv B$ o $H \equiv C$.

Mostremos el caso i. y supongamos que $c > b$ (ver la Figura 24.), el caso $c < b$ es similar, el caso $c = b$ se deja como ejercicio; como los triángulos $\triangle AHB$ y $\triangle AHC$ son rectángulos, entonces por el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = h_a^2 + BH^2 \quad (7.1)$$

$$b^2 = h_a^2 + CH^2 \quad (7.2)$$

Como $B - H - C$ entonces $HC = a - BH$, sustituyendo en 7.2

$$b^2 = h_a^2 + (a - BH)^2 = h_a^2 + a^2 + BH^2 - 2aBH \quad (7.3)$$

y por 7.1 en la expresión anterior

$$b^2 = h_a^2 + a^2 + c^2 - h_a^2 - 2aBH = a^2 + c^2 - 2aBH$$

como $a \neq 0$, ya que A, B, C son tres puntos distintos no colineales, despejando BH en la expresión anterior

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

y sustituyendo en 7.1

$$c^2 = h_a^2 + \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2$$

despejando h_a^2

$$\begin{aligned}
 h_a^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} \\
 &= \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2} = \frac{((a + c)^2 - b^2)(b^2 - (a - c)^2)}{4a^2} \\
 &= \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4a^2} \\
 &= \frac{(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)}{4a^2} \tag{7.4}
 \end{aligned}$$

Como $p = \frac{a+b+c}{2}$ entonces $a + b + c = 2p$ y también

$$p - a = \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{a + b + c - 2a}{2} = \frac{b + c - a}{2}$$

por lo tanto $b + c - a = 2(p - a)$

Similarmente $a + b - c = 2(p - c)$ y $a + c - b = 2(p - b)$, sustituyendo en 7.4

$$h_a^2 = \frac{2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c)}{4a^2} = \frac{4}{a^2} \cdot p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)$$

por lo tanto

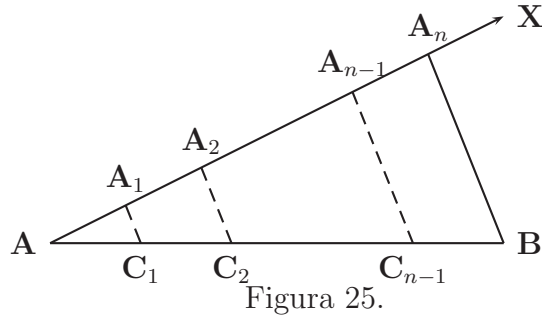
$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}. \quad \blacksquare$$

7.5.1. CONSTRUCCIONES BÁSICAS

1. Dividir un segmento en n segmentos congruentes, con n entero positivo.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 25.).

- Por A trazo una semirrecta \overrightarrow{AX} cualesquiera, tal que A , B y X sean tres puntos distintos no colineales.
- Con centro en A y radio cualesquiera, trazo arco que corta a \overrightarrow{AX} en A_1 .
- Con centro en A_1 y el mismo radio, trazo arco que corta a \overrightarrow{AX} en A_2 de tal manera que $A - A_1 - A_2$; similarmente se hallan los puntos A_3, \dots, A_{n-1}, A_n .



- Uno A_n con B y por $A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_2, A_1$ trazo paralelas a $\overline{A_n B}$ las cuales cortan a \overline{AB} en $C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_2, C_1$.
- $\overline{AC_1} \cong \overline{C_1 C_2} \cong \dots \cong \overline{C_{n-1} B}$

Justificación. Como

$$\overline{AA_1} \cong \overline{A_1 A_2} \cong \dots \cong \overline{A_{n-1} A_n}$$

y

$$\overline{BA_n} \parallel \overline{C_{n-1} A_{n-1}} \parallel \dots \parallel \overline{C_1 A_1}$$

entonces por el Teorema fundamental del paralelismo (Lema 1),

$$\overline{AC_1} \cong \overline{C_1 C_2} \cong \dots \cong \overline{C_{n-1} B}$$

2. Dividir un segmento dado en una proporción dada $\frac{p}{q}$, donde p, q son enteros positivos.

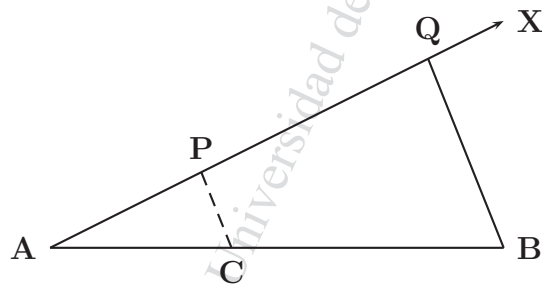


Figura 26.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 26.).

- Por A trazo una semirrecta \overrightarrow{AX} cualesquiera, tal que A , B y X sean tres puntos distintos no colineales.
- Con centro en A y radio cualesquiera, trazo arco que corta a \overrightarrow{AX} en A_1 , este procedimiento lo efectúo p veces hasta completar un segmento \overline{AP} de longitud pAA_1 , a continuación de este segmento y utilizando la misma medida AA_1 construyo el segmento \overline{PQ} de longitud qAA_1 .
- Uno Q con B y por P trazo paralela a \overline{QB} la cual corta a \overline{AB} en C .
- el punto C es el punto pedido.

Justificación. Como $\overline{QB} \parallel \overline{PC}$, entonces por el Corolario 31 (Teorema de Tales en el triángulo)

$$\frac{CA}{CB} = \frac{pAA_1}{qAA_1} = \frac{p}{q}$$

3. Hallar la cuarta proporcional de tres segmentos dados: a, b, c .

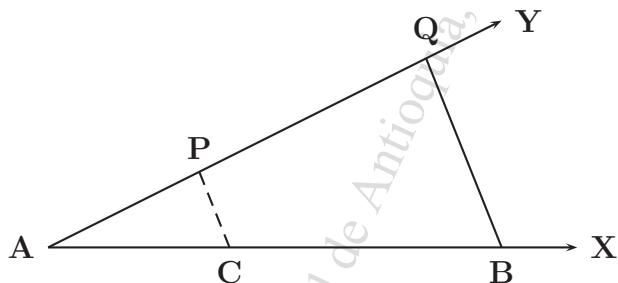


Figura 27.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 27.).

- Trazo una semirrecta \overrightarrow{AX} cualesquiera,
- Trazo una semirrecta \overrightarrow{AY} cualesquiera, que no este contenida en la recta \overleftrightarrow{AX}
- Con centro en A y radio a , trazo arco que corta a \overrightarrow{AY} en P .

- Con centro en P y radio b , trazo arco que corta a \overrightarrow{AY} en Q , tal que $A - P - Q$.
- Con centro en A y radio c , trazo arco que corta a \overrightarrow{AX} en C .
- Uno P con C y por Q trazo paralela a \overline{PC} la cual corta a \overrightarrow{AX} en B .
- el segmento \overline{CB} es el segmento pedido.

Justificación. Como $\overline{PC} \parallel \overline{QB}$, entonces por el Corolario 31 (Teorema de Tales en el triángulo)

$$\frac{AP}{PQ} = \frac{AC}{CB} \quad \text{o sea} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{CB}$$

4. Dado $C \in \overline{AB}$, hallar el conjugado armónico de C con respecto a \overline{AB} .

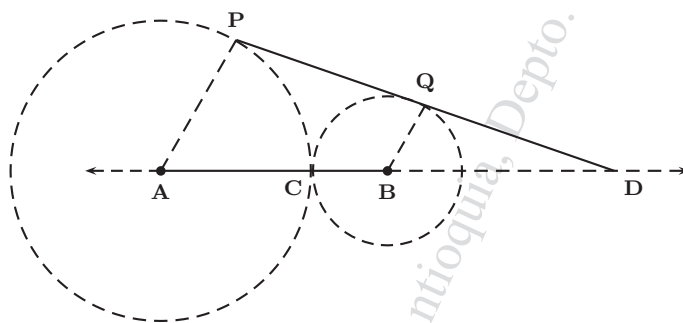


Figura 28.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 28.).

- Trazo circunferencia de centro A y radio AC .
- Trazo circunferencia de centro B y radio BC .
- En la circunferencia $C(A, AC)$, trazo un radio cualesquiera AP no paralelo a \overline{AB} .
- Por B trazo, en la circunferencia $C(B, BC)$, el radio BQ tal que $\overline{BQ} \parallel \overline{AP}$

- Uno P con Q y prolongo hasta cortar la recta \overleftrightarrow{AB} en D .
- el punto D es el conjugado de C con respecto a \overline{AB} .

Justificación. Como $\overline{BQ} \parallel \overline{AP}$ entonces $\triangle ADP \sim \triangle BDQ$ entonces, teniendo en cuenta que AP y BQ son radios en las respectivas circunferencias,

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{DA}{DB} \quad \text{o sea} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

5. Dado \overline{AB} y dada la proporción $\frac{p}{q}$, donde p, q son enteros positivos. Hallar C, D conjugados armónicos de \overline{AB} tal $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{p}{q}$.

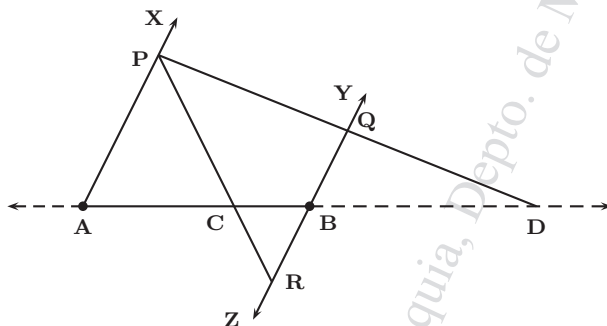


Figura 29.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 29.).

- Trazo una semirrecta cualquiera \overrightarrow{AX} que no este contenida en \overleftrightarrow{AB} .
- En el mismo semiplano, trazo la semirrecta \overrightarrow{BY} tal que $\overrightarrow{BY} \parallel \overrightarrow{AX}$ y trazo también la semirrecta \overrightarrow{BZ} opuesta a la semirrecta \overrightarrow{BY} .
- Sobre la semirrecta \overrightarrow{AX} y con la misma unidad de medida α , trazo el segmento \overline{AP} tal que $AP = p \cdot \alpha$.
- Sobre la semirrecta \overrightarrow{BY} y con la misma unidad de medida α , trazo el segmento \overline{BQ} tal que $BQ = q \cdot \alpha$.

- Sobre la semirrecta \overrightarrow{BZ} y con la misma unidad de medida α , trazo el segmento \overline{BR} tal que $BR = q \cdot \alpha$.
- Uno P con Q y prolongo hasta cortar la recta \overleftrightarrow{AB} en D .
- Uno P con R el cual corta a \overline{AB} en C .
- Los puntos C y D son conjugados armónicos con respecto a \overline{AB} bajo la razón $\frac{p}{q}$.

Justificación. Como $\overline{AX} \parallel \overline{YZ}$ entonces

$$\triangle APD \sim \triangle BQD \quad \text{y} \quad \triangle APC \sim \triangle BRC$$

entonces,

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AP}{BQ} \quad \text{o sea} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{p \cdot \alpha}{q \cdot \alpha} = \frac{p}{q}$$

y también

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AP}{BR} \quad \text{o sea} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{p \cdot \alpha}{q \cdot \alpha} = \frac{p}{q}$$

luego

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

6. Hallar la media proporcional de dos segmentos a y b dados.

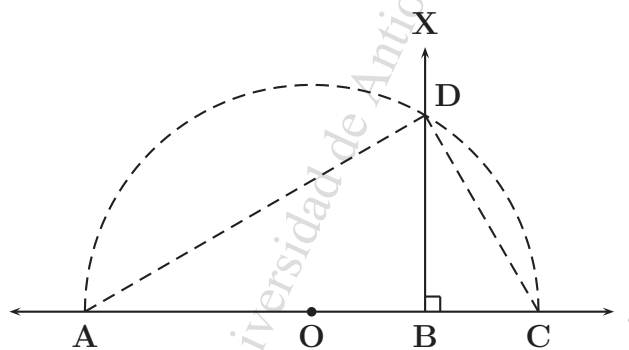


Figura 30.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 30.).

- Sobre una recta l fijo un punto A .

- Con centro en A y radio a trazo arco que corta a l en B .
- Con centro en B y radio b trazo arco que corta a l en C , tal que $A - B - C$.
- Por B trazo $\overrightarrow{BX} \perp l$.
- Hallo O punto medio de \overline{AC} .
- Trazo semicircunferencia de centro O y radio OA , la cual corta a \overrightarrow{BX} en D .
- El segmento \overline{BD} es media proporcional entre a y b .

Justificación. Como \overline{AC} es diámetro, entonces $\triangle ACD$ es rectángulo y como \overline{DB} es altura relativa a la hipotenusa en dicho triángulo, entonces, por el Teorema 102 (Proporcionalidad en el triángulo rectángulo)

$$BD^2 = BA \cdot BC = a \cdot b$$

es decir BD es media proporcional entre a y b .

7.6. APLICACIONES DE LA SEMEJANZA A LA CIRCUNFERENCIA

Teorema 109 (Teorema de Tolomeo).

En un cuadrilátero cíclico, el producto de las medidas de las diagonales es igual a la suma de los productos de las medidas de los lados opuestos.

Demostración. (Ver Figura 31.) Por el axioma de construcción de ángulo, existe una semirrecta $\overrightarrow{AF} \subset \overleftrightarrow{\pi}_{AB: C}$ con F sobre la circunferencia, tal que $\widehat{DAC} \cong \widehat{BAF}$, sea $\{E\} = \overline{AF} \cap \overline{DB}$ y como $\widehat{CAF} \cong \widehat{CAF}$ entonces por el axioma de suma (o resta) de ángulos congruentes, $\widehat{DAF} \cong \widehat{BAC}$. En los $\triangle ADC$ y $\triangle AEB$ se tiene: $\widehat{DAC} \cong \widehat{BAF}$ y $\widehat{DCA} \cong \widehat{ABE}$ (por Teorema del ángulo inscrito), entonces por el criterio A-A:

$$\triangle ADC \sim \triangle AEB$$

luego

$$\frac{\triangle ADC}{\triangle AEB} : \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{EB}$$

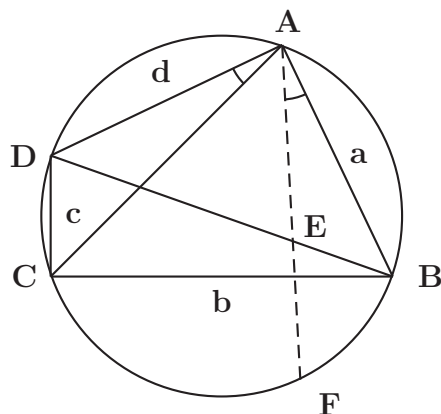


Figura 31.

luego

$$AC \cdot EB = DC \cdot AB \quad (*)$$

En los $\triangle DAE$ y $\triangle ABC$ se tiene: $\widehat{DAE} \cong \widehat{BAC}$ y $\widehat{ADE} \cong \widehat{ACB}$ (por Teorema del ángulo inscrito), entonces por el criterio A-A:

$$\triangle DAE \sim \triangle ABC$$

luego

$$\frac{\triangle DAE}{\triangle ABC} : \frac{DA}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB}$$

luego

$$DA \cdot BC = DE \cdot AC \quad (**)$$

sumando (*) y (**):

$$DC \cdot AB + DA \cdot BC = AC \cdot EB + DE \cdot AC = AC(EB + DE) = AC \cdot BD$$

es decir,

$$AC \cdot BD = a \cdot c + b \cdot d. \quad \blacksquare$$

Teorema 110.

Si dos cuerdas se interceptan en el interior de una circunferencia entonces el producto de las medidas de los segmentos determinados por el punto de intersección en una de las cuerdas es igual al producto de las medidas de los segmentos determinados en la otra cuerda.

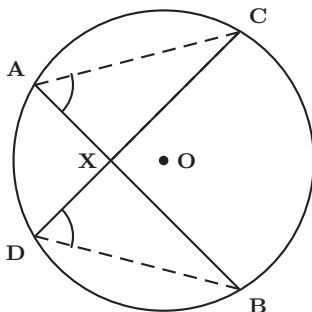


Figura 32.

Demostración. (Ver Figura 32.) Sean \overline{AB} y \overline{CD} cuerdas tales que $\{X\} = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ y $A - X - B$ y $C - X - D$. En los $\triangle AXC$ y $\triangle BXD$ se tiene que: por opuestos por el vértice $\widehat{AXC} \cong \widehat{BXD}$ y por el Teorema del ángulo inscrito $\widehat{CAX} \cong \widehat{XDB}$, luego por el criterio A-A,

$$\triangle AXC \cong \triangle BXD$$

luego

$$\frac{\triangle AXC}{\triangle BXD} : \frac{XA}{XD} = \frac{AC}{BD} = \frac{XC}{XB}$$

o sea que $XA \cdot XB = XC \cdot XD$

Nota: 1.) Obsérvese que si por ejemplo el punto $X \equiv A \equiv C$, es decir, los dos segmentos se cortan sobre la circunferencia, entonces también se cumple que $XA \cdot XB = XC \cdot XD = 0$.

2.) El resultado de este teorema nos muestra que para cualquier cuerda que pase por el punto X se cumple que $XA \cdot XB$ permanece constante o sea que este producto no depende de la cuerda, sino del punto X . ■

El siguiente teorema se deja como ejercicio, es el recíproco del teorema anterior.

Teorema 111.

Si dos segmentos se interceptan en un punto que esta en el interior de los dos segmentos y el producto de las medidas de los segmentos determinados por el punto de intersección en el primer segmento es igual al producto de las medidas de los segmentos determinados por el punto en el segundo segmento, entonces los extremos de los segmentos están sobre una circunferencia.

Teorema 112.

Si desde un punto X exterior a una circunferencia se trazan dos semirrectas secantes \bar{l} y \bar{m} que cortan a la circunferencia en A, B y C, D respectivamente, entonces

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD$$

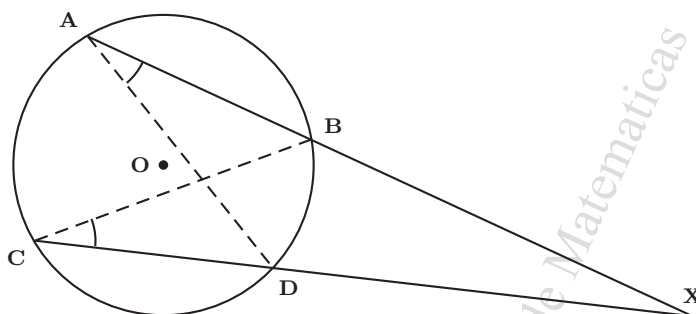


Figura 33.

Demostración. (Ver Figura 33.) Por el Teorema del ángulo inscrito $\widehat{BAD} \cong \widehat{BCD}$ y el \widehat{X} es común para los $\triangle XAD$ y $\triangle XBC$ entonces por el criterio A-A

$$\triangle XAD \sim \triangle XBC$$

luego

$$\frac{\triangle XAD}{\triangle XBC} : \frac{XA}{XC} = \frac{XD}{XB} = \frac{AD}{BC}$$

luego

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD$$

Nota: El resultado de este teorema nos muestra que para cualquier semirrecta que pase por el punto X se cumple que $XA \cdot XB$ permanece constante o sea que este producto no depende de la semirrecta, sino del punto X . ■

El recíproco del anterior teorema también es cierto, se deja como ejercicio.

Teorema 113 (Recíproco).

Si desde un punto X se trazan dos semirrectas \bar{l} y \bar{m} y A, B son puntos de \bar{l} y C, D son puntos de \bar{m} , tales que

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD,$$

entonces los puntos A, B, C, D están sobre una circunferencia.

Teorema 114.

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos semirrectas, una tangente y la otra secante, entonces el segmento entre el punto y el punto de tangencia es media proporcional entre los segmentos determinados entre el punto exterior y los puntos de intersección de la secante con la circunferencia.

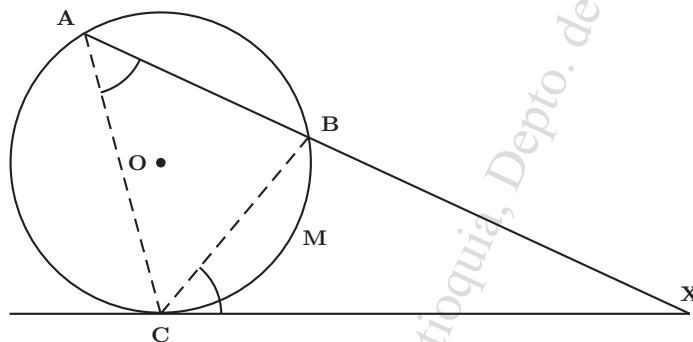


Figura 34.

Demostración. (Ver Figura 34.) Como por el teorema del ángulo semi-inscrito el $\widehat{BCX} = \frac{1}{2}\widehat{CMB}$ y \widehat{X} es común para los $\triangle XAC$ y $\triangle XBC$, entonces por el criterio A-A,

$$\triangle XAC \sim \triangle XBC,$$

luego

$$\frac{\triangle XAC}{\triangle XBC} : \frac{XA}{XC} = \frac{XC}{XB} = \frac{AC}{BC}$$

luego

$$XA \cdot XB = XC \cdot XC = XC^2. \quad \blacksquare$$

7.7. EJE RADICAL Y SUS PROPIEDADES

Definición 65 (Potencia de un punto con respecto a una circunferencia). La potencia de un punto X con respecto a una circunferencia $C(O, r)$ es el producto $XA \cdot XB$, donde A y B son los puntos de intersección de la circunferencia con una recta que pasa por X .

Notación: la potencia del punto X con respecto a la circunferencia $C(O, r)$ se denota por $p_{X;O}$, es decir,

$$p_{X;O} = XA \cdot XB$$

Nota a.) De acuerdo a los teoremas 110 y 112, todas las rectas que pasan por el punto X tienen igual potencia, por lo tanto, la potencia depende solamente del punto y la circunferencia.

b.) Si X es un punto exterior a la $C(O, r)$ y d es la distancia del punto X al centro O de la circunferencia, entonces (ver la Figura 35.)

$$p_{X;O} = XA \cdot XB = (XO + OA)(XO - OB) = (d + r)(d - r) = d^2 - r^2$$

donde A, B son los puntos de intersección de la recta \overleftrightarrow{XO} con la $C(O, r)$. En este caso $p_{X;O} > 0$, ya que $d > r$

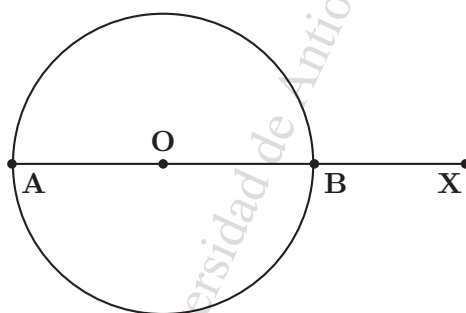


Figura 35.

c.) Con el punto X y la circunferencia $C(O, r)$ pueden suceder tres casos:

1. $X \in ExtC(O, r)$, en este caso vimos que $p_{X;O} > 0$, ya que $d > r$
2. $X \in IntC(O, r)$, en este caso $p_{X;O} = d^2 - r^2 < 0$, ya que $d < r$

3. $X \in C(O, r)$, en este caso $p_{X;O} = d^2 - r^2 = 0$, ya que $d = r$

En resumen, la potencia es positiva en el exterior de la circunferencia, negativa en el interior de la circunferencia y es cero cuando el punto esta sobre la circunferencia.

d.) Si $X \equiv O$, entonces $d = 0$ y por tanto $p_{X;O} = d^2 - r^2 = -r^2$, este es el valor mínimo de la potencia, ya que $d = 0$ es el valor mínimo de d .

e.) Por el teorema 114, la potencia de un punto exterior a una circunferencia es igual al cuadrado de la medida del segmento tangente desde el punto X a la circunferencia $C(O, r)$, es decir, $p_{X;O} = XT^2$, donde T es el punto de tangencia.

f.) La potencia de un punto interior a una circunferencia es negativa e igual al cuadrado de la semi-cuerda perpendicular al diámetro que pasa por el punto.

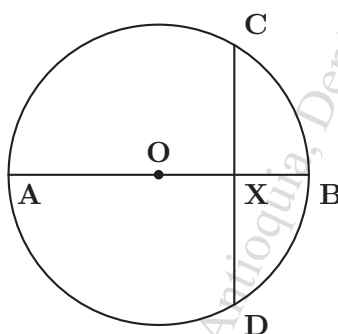


Figura 36.

(Ver Figura 36.) En efecto, sea \overline{AB} diámetro y $X \in \overline{AB}$ y sea \overline{CD} una cuerda tal que $\overline{CD} \cap \overline{AB} = \{X\}$ y $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, por tanto X es punto medio de \overline{CD} , entonces

$$p_{X;O} = -XA \cdot XB = -XC \cdot XD = -XC^2 = -XD^2 = -\left(\frac{CD}{2}\right)^2$$

Teorema 115 (Teorema del eje radical).

El lugar geométrico de los puntos de igual potencia con respecto a dos circunferencias no concéntricas, es una recta perpendicular a la recta que pasa por los centros.

Demostración. (Ver Figura 37.) Sean las circunferencias $C(O, r)$ y $C(O', r')$, sea M el punto medio de $\overleftrightarrow{OO'}$ y sea X un punto tal que $p_{X;O} = p_{X;O'}$ (*), sea H la **proyección** de X sobre $\overleftrightarrow{OO'}$, veamos que cualquiera que sea el punto X con la propiedad (*), tendrá como proyección sobre $\overleftrightarrow{OO'}$ el punto H .

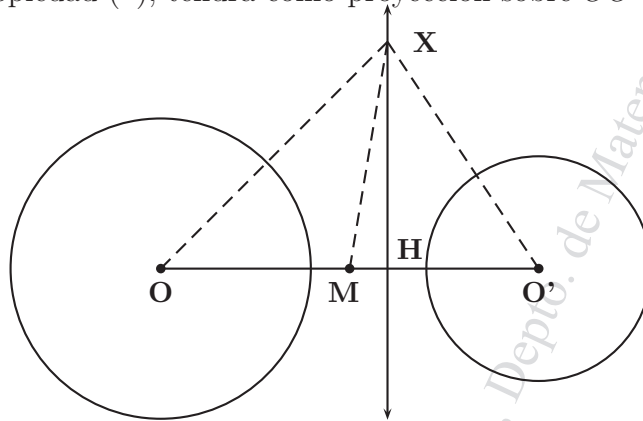


Figura 37.

En efecto, por la hipótesis, por la propiedad b.) hecha en la nota anterior y por el Teorema 107 b), se tiene

$$\begin{aligned}
 p_{X;O} &= p_{X;O'} \\
 (XO)^2 - (r)^2 &= (XO')^2 - (r')^2 \quad \text{por la propiedad b)} \\
 (XO)^2 - (XO')^2 &= (r)^2 - (r')^2 \\
 2 \cdot OO' \cdot MH &= (r)^2 - (r')^2 \quad \text{por el Teorema 107 b)} \\
 \text{luego } MH &= \frac{(r)^2 - (r')^2}{2 \cdot OO'}
 \end{aligned}$$

como r, r', OO' son constantes y $OO' \neq 0$, entonces MH es constante y como M es fijo entonces H es fijo, cualquiera sea el punto X , por lo tanto los puntos X que cumplen con la propiedad (*) están sobre una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{OO'}$. ■

La recta cuya existencia esta garantizada por el anterior teorema, le damos el siguiente nombre:

Definición 66 (Eje Radical). *La recta cuyos puntos tienen igual potencia con respecto a dos circunferencias, se le llama Eje Radical.*

Propiedades del Eje Radical.

1. Si las dos circunferencias se interceptan, entonces el eje radical pasa por los puntos de intersección, ya que cada punto de intersección tiene potencia igual a cero con respecto a las dos circunferencias.
2. Si las dos circunferencias son tangentes, entonces el eje radical es la tangente común a ambas circunferencias, ya que la potencia en el punto de tangencia es cero con respecto a las dos circunferencias y la tangente común es perpendicular a la recta que pasa por los centros de las dos circunferencias.
3. Si las dos circunferencias son concéntricas y distintas, entonces no hay eje radical, ya que $d^2 - r^2 \neq (d')^2 - (r')^2$.

Teorema 116 (Propiedades del Eje Radical).

- a.) *Las tangentes desde un punto del Eje Radical a las dos circunferencias, son congruentes.*
- b.) *Los Ejes Radicales de tres circunferencias, cuyos centros son no colineales, tomados de dos en dos, son concurrentes, (este punto de concurrencia se le llama Centro Radical).*

Demostración. a.) (ver Figura 38.) Sea X un punto del Eje Radical y sean \overline{XT} y $\overline{XT_1}$ tangentes a las circunferencias $C(O, r)$ y $C(O', r')$ en T y T_1 respectivamente, entonces por el Teorema 114 $p_{X;O} = XT^2$ y $p_{X;O'} = XT_1^2$ y como X pertenece al Eje Radical, entonces $p_{X;O} = p_{X;O'}$ luego

$$XT^2 = XT_1^2$$

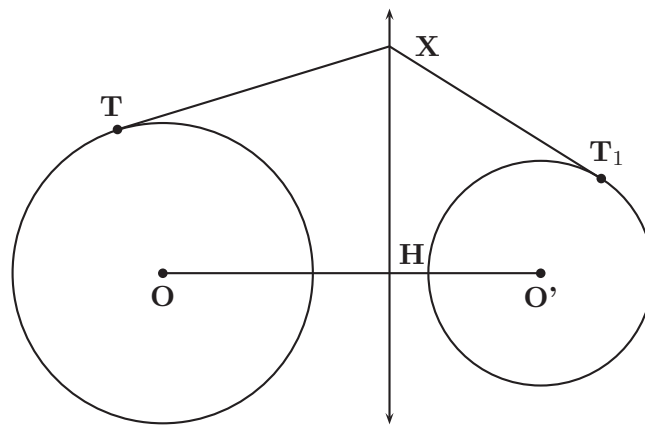


Figura 38.

luego $XT = XT_1$, o sea que $\overline{XT} \cong \overline{XT_1}$

b.) (ver Figura 39.) Sea l el Eje Radical de $C(O, r)$ y $C(O', r')$ y sea l' el Eje Radical de $C(O', r')$ y $C(O'', r'')$ por lo tanto $l \perp \overleftrightarrow{OO'}$ y $l' \perp \overleftrightarrow{O'O''}$.

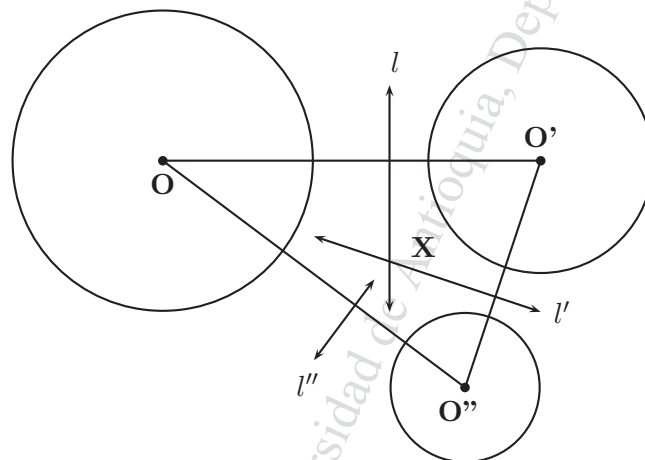


Figura 39.

Como O, O', O'' son no colineales, entonces l y l' se interceptan, sea

$$\{X\} = l \cap l'.$$

Veamos que $X \in l''$.

En efecto, como $X \in l$ entonces

$$p_{X;O} = p_{X;O'} \quad (*)$$

y como $X \in l'$ entonces

$$p_{X;O'} = p_{X;O''} \quad (**)$$

entonces de (*) y (**)

$$p_{X;O} = p_{X;O''}$$

luego $X \in l''$. ■

Observación.

De la parte b.) del teorema anterior se concluye que:

1. Si las tres circunferencias son secantes dos a dos, entonces las cuerdas comunes son concurrentes.

2. Si las tres circunferencias son tangentes dos a dos, entonces las tangentes comunes son concurrentes.

Con el Eje Radical se pueden hacer construcciones de circunferencias.

Ejemplo. Construir una circunferencia que pase por dos puntos y sea tangente a una recta dada.

Demos el problema por construido. Supongamos que los puntos dados son A, B y la recta dada es l , se presentan dos situaciones: a) $\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \emptyset$, b) $\overleftrightarrow{AB} \cap l = \emptyset$.

a) Si $\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \emptyset$, sea $\{X\} = \overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \emptyset$, sea $C(O, r)$ la circunferencia buscada y sea $C(O', r')$ una circunferencia **cualesquiera** que pase por A y B , entonces \overleftrightarrow{AB} es el Eje Radical de estas dos circunferencias, por lo tanto las tangentes desde el punto X a las dos circunferencias son congruentes; si $\overline{XT'}$ es la tangente a la $C(O', r')$ y \overline{XT} es la tangente a la circunferencia buscada $C(O, r)$, entonces $XT = XT'$.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 40.).

- Uno A con B y prolongo hasta cortar l en X .

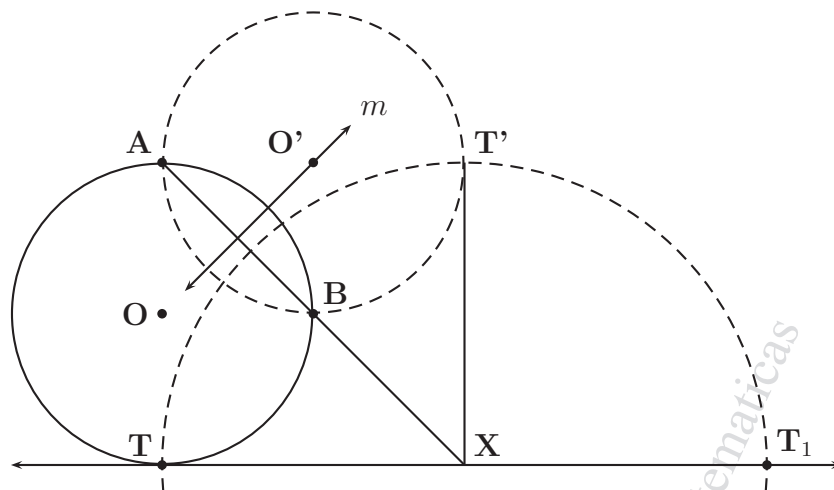


Figura 40.

- Trazo m la mediatriz de \overline{AB} .
- Por un punto cualquiera O' de m , trazo una circunferencia que pase por A, B .
- Desde X trazo $\overline{XT'}$ tangente a la circunferencia de centro O'
- Con centro en X y radio XT' trazo arcos que cortan a l en T y T_1 .
- Las circunferencias que pasan por A, B, T y por A, B, T_1 son las circunferencias pedidas (dos soluciones).

b) Si $\overleftrightarrow{AB} \cap l = \emptyset$, luego $\overleftrightarrow{AB} \parallel l$. Sea $C(O, r)$ la circunferencia buscada y sea T el punto de tangencia entre la $C(O, r)$ y l , por lo tanto $\overline{OT} \perp l$, pero como $\overleftrightarrow{AB} \parallel l$, entonces $\overline{OT} \perp \overline{AB}$, luego \overline{OT} es mediatriz de \overline{AB}

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Uno A con B .
- Trazo m la mediatriz de \overline{AB} que corta a l en T .

- Trazo circunferencia que pasa por A, B, T , que es la circunferencia pedida.

Ejemplo. Construir una circunferencia que pase por dos puntos y sea tangente a una circunferencia dada.

Demos el problema por construido. Supongamos que los puntos dados son A, B y la circunferencia dada es $C(O', r')$ y sea m la mediatriz de \overline{AB} , se presentan dos casos: a) $O' \notin m$, b) $O' \in m$

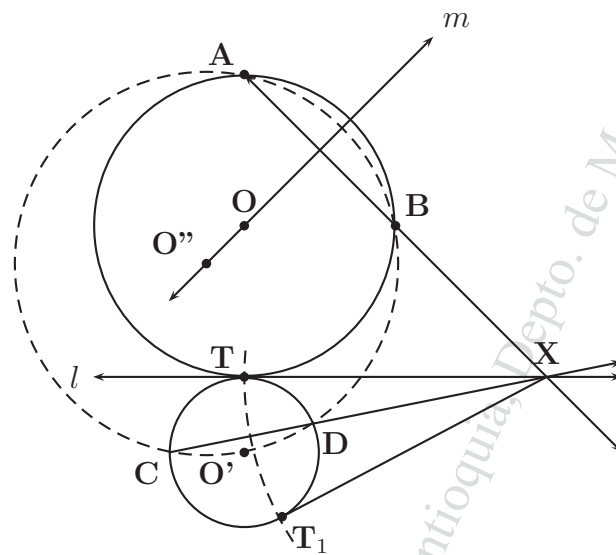


Figura 41.

a) $O' \notin m$, sea $C(O'', r'')$ una circunferencia que pase por A, B e intercepte a la circunferencia dada $C(O', r')$ en los puntos C, D , por lo tanto \overleftrightarrow{CD} es el Eje Radical de estas dos circunferencias, como la circunferencia buscada $C(O, r)$ y la circunferencia dada $C(O', r')$ son tangentes, entonces la tangente l común a estas dos circunferencias es el Eje Radical de ambas y como $O' \notin m$, entonces l y \overleftrightarrow{CD} se interceptan en un punto X ; como los Ejes Radicales de tres circunferencias cuyos centros no son colineales son concurrentes, entonces X es el centro radical de las tres circunferencias, luego las tangentes desde X a las tres circunferencias son congruentes.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 41.).

- Uno A con B .
- Trazo m la mediatriz de \overline{AB} .
- Por un punto O'' de m trazo circunferencia que pasa por A, B y que corte a la circunferencia dada $C(O', r')$ en los puntos C, D .
- Uno C con D y prolongo hasta cortar \overleftrightarrow{AB} en X .
- Desde X trazo trazo \overline{XT} y $\overline{XT_1}$ tangentes a la circunferencia dada $C(O', r')$.
- Las circunferencias que pasan por A, B, T y A, B, T_1 son las circunferencias pedidas (dos soluciones).

b) Si $O' \in m$. Sea $\{T\} = m \cap C(O', r')$, en este caso, O, T, O' son colineales y por tanto T es el punto de tangencia.

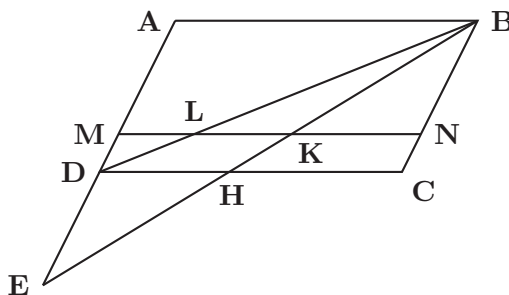
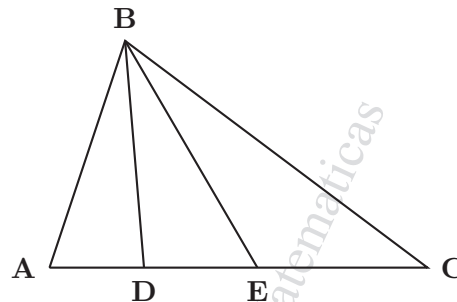
Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Uno A con B .
- Trazo m la mediatriz de \overline{AB} , la cual intercepta a la circunferencia dada $C(O', r')$ en T .
- Trazo circunferencia que pase por los puntos A, B, T y esta es la circunferencia pedida.

7.8. Ejercicios y Problemas de Semejanza

1. Sea $MNPA$ un paralelogramo dado, entonces para cualquier semirrecta con origen en M y que corta a \overline{NP} en B y a \overline{AP} en C se cumple que $NB \cdot AC$ es constante.

2. En la figura, si $\widehat{ABD} \cong \widehat{DBE} \cong \widehat{EBC}$, entonces $\frac{AD}{EC} = \frac{AB \cdot BD}{BE \cdot BC}$.



3. Si $ABCD$ es un paralelogramo y $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, $AB = 12$, $DM = 4$, $DE = 6$, $KB = 2KH$. Hallar: a) AM , b) DH , c) DC , d) KL , e) LM .

4. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en C y \overrightarrow{BD} cualquier semirrecta con origen en B y $D \in \overline{AC}$, probar que

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + DC^2$$

5. Demostrar que el cuadrado de la medida de la bisectriz \overline{AE} de un ángulo exterior de un $\triangle ABC$ es igual al producto de las medidas de los segmentos que la bisectriz determina sobre la recta que contiene al lado opuesto, menos el producto de las medidas de los otros dos lados. (Ayuda: siendo $C(O, r)$ la circunferencia que circunscribe al triángulo y $\{D\} = C(O, r) \cap \overleftrightarrow{AE}$, observar los $\triangle DAC$ y $\triangle ABE$).

6. Se tiene un cuadrado $ABCD$ de lado a . Se traza una circunferencia que pasa por el vértice A y por los puntos medios de los lados \overline{AB} y \overline{AD} . Probar que la medida de una tangente a dicha circunferencia trazada desde el punto C es igual a a .
7. Construir un triángulo dadas las razón entre los lados c y b (es decir, dado $\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$), la mediana m_a y el lado a ($\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$, m_a , a)
8. Por un punto D del lado \overline{AB} de un $\triangle ABC$ se traza $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ (E sobre \overline{BC}), de tal manera que $DB = e$, $CE = 2e$, $BE = 2AD$. Calcular los lados AB y BC del triángulo.
9. Demostrar que en un mismo triángulo las alturas son inversamente proporcionales a sus respectivos lados.
10. Considere la $C(O, r)$. Sea \overline{AB} un diámetro. Se traza por B una tangente y por A una secante cualesquiera que corta a la $C(O, r)$ en M y a la tangente en N . Probar que $AM \cdot AN = 4r^2$.
11. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en A , si desde B y C se trazan semirrectas \overline{n} y \overline{m} que bisectan los lados opuestos \overline{AC} y \overline{AB} en N y M respectivamente y si $l \parallel \overline{BC}$ por A tal que $\overline{n} \cap l = \{D\}$ y $\overline{m} \cap l = \{E\}$ entonces

$$BD^2 + CE^2 = 5BC^2$$
12. Sea $C(O, r)$, se traza una cuerda \overline{CD} , O' el punto medio de \overline{CD} , se traza la circunferencia de centro O' y diámetro \overline{CD} , sea \overline{AB} diámetro de $C(O, r)$ perpendicular a \overline{CD} ; se trazan \overline{AT} y $\overline{AT'}$ tangentes a la $C(O')$, la cuerda $\overline{TT'}$ corta a \overline{AB} en F . Demostrar que O' es punto medio de \overline{BF} .
13. En $\triangle ABC$ rectángulo en A la hipotenusa mide a y la altura relativa a la hipotenusa mide h , se inscribe un cuadrado con un lado sobre la hipotenusa. Calcular el lado del cuadrado en términos de a y h .
14. En una circunferencia de diámetro 40cm. , hallar la medida de la mayor y la menor cuerda que puede trazarse por un punto situado a 12cm. del centro. Explicar porque es la mayor y la menor.

15. Desde el punto medio D del lado \overline{AB} del $\triangle ABC$, rectángulo en A , se traza $\overline{DE} \perp \overline{BC}$, con $E \in \overline{BC}$. Demostrar la relación

$$EC^2 - EB^2 = AC^2$$

16. Demostrar que el cuadrado de la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo es igual al producto de los segmentos que la bisectriz determina en el lado opuesto menos el producto de los otros dos lados (Ayuda: si \overline{CD} es la bisectriz exterior en el $\triangle ABC$ y $C(O, r)$ es la circunferencia que circunscribe al triángulo y $F \in C(O, r) \cap \overline{CD}$, demuestre que $\triangle ADC \sim \triangle FBC$).

17. En un $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$, se traza $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Demostrar la relación

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = BD^2 + 2DA^2 + 3CD^2$$

18. Si el triángulo del ejercicio anterior fuera un triángulo equilátero, mostrar que la suma de los cuadrados de las medidas de los lados es igual a cuatro veces el cuadrado de la medida de la altura.

19. El $\triangle ABC$ está inscrito en una $C(O, r)$, sea \overline{AD} la bisectriz de \hat{A} con $D \in C(O, r)$ y sea $E \in \overline{BC} \cap \overline{AD}$. Mostrar que:
a) $BD^2 = AD \cdot ED$, b) $\triangle BED \sim \triangle AEC$.

20. $LMNT$ es un paralelogramo, $LT = 15$, $LM = 8$, $RN = 12$, $\overleftrightarrow{NR} \perp \overleftrightarrow{LR}$, $\overleftrightarrow{TH} \perp \overleftrightarrow{MN}$, $H \in \overline{MN}$. Hallar TH .

21. Dado el $\triangle ABC$, sea $\overleftrightarrow{AN} \parallel \overline{BC}$ y M punto medio de \overline{BC} , sea $P \in \overleftrightarrow{NM} \cap \overleftrightarrow{AB}$ y $Q \in \overleftrightarrow{NM} \cap \overleftrightarrow{AC}$. Demostrar que

$$\frac{PN}{PM} = \frac{QN}{QM}$$

22. Dado un $\triangle ABC$ isósceles con $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ y la circunferencia tangente a los lados congruentes en A y B . Desde un punto M del arco de la circunferencia en el interior del triángulo, se traza $\overline{MD} \perp \overline{AB}$, $\overline{MF} \perp \overline{CB}$ y $\overline{ME} \perp \overline{CA}$. Mostrar que

$$MD^2 = ME \cdot MF$$

23. Sean $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ las alturas de un $\triangle ABC$; estas alturas se cortan en el punto H . Demostrar que:

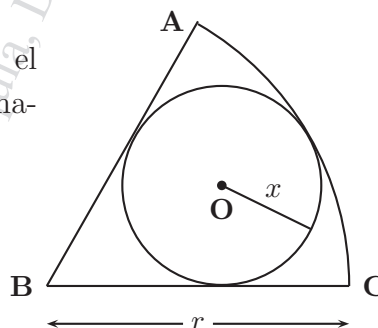
$$AA'.A'H = A'C.A'B, \quad BB'.B'H = B'A.B'C, \quad CC'.C'H = C'B.C'A$$

24. Se dá una circunferencia de centro O y diámetro \overline{AB} , por un punto M sobre la prolongación de \overline{AB} , se trazan las tangentes \overline{MN} y \overline{MP} a la circunferencia, la cuerda \overline{NP} corta al diámetro en C . Demostrar que:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB}$$

25. Demostrar que si dos triángulos tienen sus lados respectivamente paralelos o respectivamente perpendiculares, entonces dichos triángulos son semejantes.
26. Dado un paralelogramo $ABCD$, tal que: $DC = 32$, $AD = 17$, $AC = 28$. Hallar DB .
27. Sea $\triangle ABC$ con \overline{CE} , \overline{BD} , \overline{AF} bisectrices. Si $CA = 32$, $AB = 20$, $CB = 36$. Hallar AE , CF , AD .
28. Demostrar que la suma de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, no excede la longitud de la diagonal de un cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo como lado.
29. Demostrar que en un paralelogramo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.
30. Sea un triángulo rectángulo ABC (recto en A), donde: $AB = 8$, $AC = 15$. Calcular \overline{BC} , la altura \overline{AH} y los segmentos \overline{BH} y \overline{HC} . Se traza por B una paralela a \overline{AC} que corta la altura \overline{AH} en I . Evaluar \overline{AH} , \overline{HI} y \overline{BI} .
31. Sobre el lado \overline{AB} de un ángulo \widehat{BAC} , se toman dos puntos D y E y por esos puntos se trazan dos paralelas que cortan al lado \overline{AC} en F y G respectivamente; se trazan \overline{FE} y por el punto G , una paralela a \overline{FE} que corta a \overline{AB} en H . Demostrar que $AE^2 = AD.AH$.
32. Dado un cuadrilátero $ABCD$, sea O el punto de intersección de sus diagonales. Por el punto O se traza una paralela a \overline{BC} que corta a \overline{AB} en E ; luego se traza por O una paralela a \overline{CD} que corta a \overline{AD} en F .

- a. Mostrar que $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$ (comparar cada una de estas razones con una misma razón).
- b. Mostrar que $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$.
- c. Se traza $\overline{OG} \parallel \overline{AB}$ y cortando \overline{BC} en G y $\overline{OH} \parallel \overline{AD}$, corta a \overline{DC} en H . Mostrar que $CG \cdot DH = BG \cdot CH$.
33. Demostrar que las paralelas a los lados de un triángulo ABC , trazadas por el punto G de concurrencia de las medianas, dividen cada lado en tres partes iguales.
34. Sea $ABCD$ un cuadrilátero, sea F sobre \overleftrightarrow{AC} y E sobre \overleftrightarrow{DB} tales que $\overline{FB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{EC} \parallel \overline{AB}$. Mostrar que $\overline{AD} \parallel \overline{FE}$.
35. El perímetro de un triángulo mide 90 cm.. Sabiendo que las medidas de los lados están en la relación 1 : 2 : 3. Calcular la medida de cada lado.
36. Demuestre que en triángulos semejantes las alturas homólogas, las medianas homólogas y las bisectrices homólogas son proporcionales a los lados homólogos.
37. En la figura, la $C(O, x)$ está inscrita en el sector circular ABC . Si $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$, hallar x en función de r .
(Rta.: $\frac{r}{3}$).



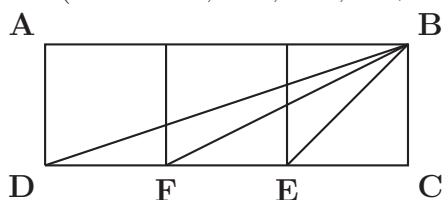
38. Si en un triángulo rectángulo, X y Y son las medidas de los catetos y Z es la medida de la altura correspondiente a la hipotenusa, demuestre que:

$$\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} = \frac{1}{Z^2}$$

39. Los catetos \overline{AB} y \overline{AC} de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ miden respectivamente $4a$ y $3a$. Por el punto medio M de \overline{AB} se traza hacia el exterior del triángulo, un segmento \overline{MN} perpendicular a \overline{AB} e igual a su mitad. Hallar la medida de \overline{NC} .

40. Los lados de un triángulo miden 10, 12 y 18. Si el perímetro de un triángulo semejante a él mide 1,200, cuáles son las medidas de los lados del segundo triángulo? Cuánto miden las tres alturas, las tres medianas y las tres bisectrices del primer triángulo?

(Rta.: 300, 360, 540, $30\sqrt{41}$, $30\sqrt{176}$, $30\sqrt{209}$)



41. Si ABCD es un rectángulo de lados a y $3a$. Demostrar que

$$m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{BFC}) + m(\widehat{BDC})$$

42. a_1, b_1, c_1 son puntos medios de los lados del triángulo $\triangle ABC$. Demuestre: $\triangle ABC \sim \triangle a_1b_1c_1 \sim \triangle Ac_1b_1 \sim \triangle Bc_1a_1 \sim \triangle Cb_1a_1$

43. ABCD es un paralelogramo $O \in AC, \overline{OX} \perp \overline{AD}, \overline{OY} \perp \overline{AB}$. Demostrar que $\frac{OX}{OY} = \frac{AB}{AD}$

44. Dos circunferencias son tangentes interiormente en el punto A. Del punto A, se trazan las secantes \overleftrightarrow{AC} y \overleftrightarrow{AE} . B y D pertenecen a la circunferencia interior. C y E pertenecen a la circunferencia exterior. Demuestre que $\triangle ABD \sim \triangle ACE$.

45. Sea \overline{AB} un diámetro en la $C(O, r)$, por B se traza una tangente a la circunferencia y por A se traza una secante cualquiera que intercepta la circunferencia en M y a la tangente en N. Demostrar que

$$AM \cdot AN = 4r^2$$

46. Demostrar que en un trapecio el segmento paralelo a las bases que pasa por el punto de intersección de las diagonales, es bisecado por dicho punto.

47. Dos triángulos rectángulos son semejantes. Si los catetos homólogos miden a y a' , b y b' y las hipotenusas homólogas miden c y c' , demostrar que $aa' + bb' = cc'$.

48. Sean \overline{AB} y \overline{CD} dos cuerdas perpendiculares de una circunferencia de radio r y sea $\{X\} = \overline{AB} \cap \overline{CD}$. Demostrar que

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = 4r^2$$

49. Las bases mayor y menor de un trapezio miden a y b respectivamente. Por un punto de uno de los lados no paralelos se traza un segmento paralelo a las bases. El segmento divide al lado en la relación $m : n$. Calcular la longitud del segmento.
50. Dado el $\triangle ABC$, se consideran los puntos D, E, F sobre las rectas $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ respectivamente. Si las rectas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BE}$ y \overleftrightarrow{CF} pasan por el centro O de la circunferencia circunscrita del $\triangle ABC$, cuyo radio es R , mostrar que
- $$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}$$
51. En un triángulo el punto de concurrencia de: las alturas, el de las medianas y el de las mediatrices están alineados (Recta de Euler).
52. Demostrar que en todo triángulo, la bisectriz se encuentra entre la mediana y la altura trazadas desde el mismo vértice.
53. Las bases de un trapezio miden 20 y 12 y los lados no paralelos miden 10 y 12. Calcular la medida de las diagonales y de las alturas y los lados del triángulo que se forma al prolongar los lados no paralelos.
54. $ABCD$ es un cuadrilátero. $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, CE = EA = m, BF = FD = n, EF = r$.
Demuestre: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2m)^2 + (2n)^2 + 4r^2$.
55. Sea P un punto cualesquiera en uno de los lados de un rectángulo. Probar que la suma de las medidas de los segmentos perpendiculares desde P a las diagonales del rectángulo es constante.
56. Construir un triángulo ABC , conociendo
- $\overline{BC}, \widehat{ABC}$ y \overline{BN} que es la altura desde B , (a, β, h_b) .
 - $\overline{BC}, \overline{AM}$ y \overline{AH} que son la mediana y la altura correspondientes a \overline{BC} , (a, m_a, h_a) .
 - \overline{BC} , y la altura y la bisectriz \overline{BH} y \overline{CD} , (a, h_b, v_c) .
 - \overline{BC} y las alturas \overline{BH} y \overline{CP} , (a, h_b, h_c) .
 - $\overline{BC}, \overline{AC}$ y la altura \overline{BH} , (a, b, h_b) .
 - $\overline{BC}, \widehat{BAC}$ y la mediana \overline{AM} , (a, α, m_a) .

- g) \overline{BC} , \widehat{BAC} y la altura \overline{BH} , (a, α, h_b) .
- h) Los pies de las tres medianas.
- i) Las tres medianas: m_a, m_b, m_c .
- j) \widehat{ABC} , \widehat{ACB} y el perímetro, $(\beta, \gamma, p; \text{ donde } p = a + b + c)$.
57. Construir un triángulo equilátero, conociendo el radio de la circunferencia inscrita.
58. Construir un triángulo equilátero, conociendo su perímetro.
59. Construir un triángulo isósceles conociendo el perímetro y la medida de la altura correspondiente a la base.
60. Construir una circunferencia que pase por dos puntos A y B y que sea tangente a una recta l ; con A y B del mismo lado con respecto a l .
- a) $\overline{AB} \parallel l$, b) $\overline{AB} \cap l = \{P\}$.
61. Construir una circunferencia que sea tangente a dos rectas paralelas dadas y que pase por un punto dado.
62. Construir una circunferencia que sea tangente a dos rectas que se cortan y pase por un punto en el interior del ángulo entre las dos rectas.
63. Dado un punto en el interior de una circunferencia, construir una cuerda tal que el punto dado sea punto medio de dicha cuerda.
64. Sea AB diámetro de una circunferencia, A, B, M colineales con B entre A y M , \overline{MN} tangente en N y $\overline{NC} \perp \overline{AB}$, C entre A y B . Mostrar que
- $$\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB}$$
65. Sea $ABCD$ un paralelogramo, \overrightarrow{AM} bisectriz de \widehat{DAB} con $M \in \overline{DB}$ y \overrightarrow{DN} bisectriz de \widehat{ADC} con $N \in \overline{AC}$. Probar que $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$.
66. Dado un ángulo XOY y un punto A en el interior de \widehat{XOY} , trazar por A una recta que corte a \overrightarrow{OX} en M y a \overrightarrow{OY} en N , de tal forma que A sea punto medio de \overline{MN} .

67. Dos circunferencias de centros O y O_1 y de radios diferentes son secantes en A . Trazar por A una cuerda \overline{BC} , de tal forma que A sea el punto medio de \overline{BC} . ($B \in C(O)$ y $C \in C(O_1)$).
68. Construir un triángulo conociendo dos ángulos y la suma de las medidas de dos de sus lados.
69. Construir un rectángulo $ABCD$ conociendo \overline{AB} y el ángulo \widehat{AOB} formado por las diagonales.
70. Construir un triángulo ABC , rectángulo en A , conociendo la suma de las medidas de los catetos y el ángulo \widehat{C} .
71. Construir un rectángulo conociendo su perímetro y su diagonal.
72. Construir un trapecio conociendo sus bases y sus diagonales.
73. Construir un cuadrilátero conociendo sus lados y una de sus diagonales.
74. Construir un cuadrilátero inscriptible conociendo \overline{BD} , y \overline{AC} que son sus diagonales, el ángulo \widehat{A} y el lado \overline{AB} .
75. Dados dos segmentos de longitud a cm. y b cm., construir con regla y compás:
a) un segmento de longitud ab cm., b) un segmento de longitud $\frac{a}{b}$ cm.
76. Construir una circunferencia que sea tangente a dos rectas dadas y cuyo centro esté sobre una recta dada.
77. Trazar una recta tangente a una circunferencia dada y paralela a una recta dada.
78. Construir un triángulo conociendo:
- Los pies E, F, D de las tres alturas.
 - Un lado \overline{BC} , el ángulo opuesto α , y la suma o la diferencia de los otros dos lados $(a, \alpha, c - b)$, $(a, \alpha, c + b)$.
 - Un ángulo β y las alturas opuestas \overline{AD} y \overline{CF} . (β, h_a, h_c) .
 - Un ángulo β , la altura \overline{BE} y la altura \overline{AD} , (β, h_b, h_a) .
 - Un lado \overline{BC} , un ángulo β , y la mediana \overline{AD} (a, β, m_a) .
-

- f) El perímetro, un ángulo y la altura bajada desde el vértice del ángulo: (p, α, h_a) .
 - g) La altura y bisectriz bajadas del mismo vértice y el radio de la circunferencia inscrita (v_c, h_c, r) .
 - h) La altura y la mediana bajadas desde el mismo vértice y el radio de la circunferencia circunscrita (m_a, h_a, R) .
79. Construir un triángulo conociendo:
- a) Dos lados y la longitud de la bisectriz del ángulo comprendido (a, c, v_b) .
 - b) La base \overline{AB} , el ángulo opuesto y la suma de las medidas de los lados que comprenden este ángulo $(c, \gamma, a + b)$.
80. Por un punto P exterior a una circunferencia trazar una secante PAB , tal que $\frac{PA}{AB} = \frac{m}{n}$ donde m, n son dos números naturales dados.